

Chemisches Analogcomputermodell zur
Approximation der Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ mit
 $x \geq 0$

David Steffen

Friedrich-Schiller-Universität Jena

david.steffen@uni-jena.de

18. Juni 2016

Einleitung

Aufgabe ist es ein chemisches Analogcomputermodell zur Approximation der Kubikwurzel ($f(x) = \sqrt[3]{x}$) in der Umgebung von 1 zu erstellen.

Einleitung

Aufgabe ist es ein chemisches Analogcomputermodell zur Approximation der Kubikwurzel ($f(x) = \sqrt[3]{x}$) in der Umgebung von 1 zu erstellen.

Hierzu wird die Funktion erst mittels Taylorreihe approximiert und diese dann in das Modell umgewandelt.

Einleitung

Aufgabe ist es ein chemisches Analogcomputermodell zur Approximation der Kubikwurzel ($f(x) = \sqrt[3]{x}$) in der Umgebung von 1 zu erstellen.

Hierzu wird die Funktion erst mittels Taylorreihe approximiert und diese dann in das Modell umgewandelt.

Das Modell soll dann noch zusätzlich auf Laufzeit und Genauigkeit untersucht werden.

Überblick

Taylorreihe

chemisches Modell

Laufzeit - Genauigkeit

Fazit

Die Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Die Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Aber hier untersuchen wir nur die Taylorreihe bis zum Grad 6, also reicht:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f'(x_0) * (x - x_0) + f''(x_0) * \frac{(x - x_0)^2}{2} + f'''(x_0) * \frac{(x - x_0)^3}{6} \\ & + f^{(4)}(x_0) * \frac{(x - x_0)^4}{24} + f^{(5)}(x_0) * \frac{(x - x_0)^5}{120} + f^{(6)}(x_0) * \frac{(x - x_0)^6}{720} \end{aligned}$$

Da wir die Umgebung von 1 untersuchen wollen, gilt $x_0 = 1$.

Da wir die Umgebung von 1 untersuchen wollen, gilt $x_0 = 1$.
Eingesetzt in die Reihe ergibt sich dann:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{3}(x - 1) - \frac{2}{18}(x - 1)^2 + \frac{5}{81}(x - 1)^3 \\ - \frac{10}{243}(x - 1)^4 + \frac{22}{729}(x - 1)^5 - \frac{154}{6561}(x - 1)^6$$

$$f(x) = \frac{2618}{6561} + \frac{2618}{2187} * x - \frac{2618}{2187} * x^2 + \frac{6545}{6561} * x^3 \\ - \frac{1190}{2187} * x^4 + \frac{374}{2187} * x^5 - \frac{154}{6561} * x^6$$

$$f(x) = \frac{2618}{6561} + \frac{2618}{2187} * x - \frac{2618}{2187} * x^2 + \frac{6545}{6561} * x^3 \\ - \frac{1190}{2187} * x^4 + \frac{374}{2187} * x^5 - \frac{154}{6561} * x^6$$

Zum Test $f(1)$ überprüfen:

$$f(x) = \frac{2618}{6561} + \frac{2618}{2187} * x - \frac{2618}{2187} * x^2 + \frac{6545}{6561} * x^3 \\ - \frac{1190}{2187} * x^4 + \frac{374}{2187} * x^5 - \frac{154}{6561} * x^6$$

Zum Test $f(1)$ überprüfen:

$$f(1) = 1$$

Einfache Rechenarten

Zur Erinnerung: (Tafelbild)

Aufspalten der Formel

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{2618}{6561} + \frac{2618}{2187} * x \\ & - \frac{2618}{2187} * x^2 + \frac{6545}{6561} * x^3 \\ & - \frac{1190}{2187} * x^4 + \frac{374}{2187} * x^5 \\ & - \frac{154}{6561} * x^6 \end{aligned}$$

Aufspalten der Formel

Wir setzen:

- ▶ $C1 = \frac{2618}{6561}$
- ▶ $C2 = \frac{2618}{2187} * x$
- ▶ $C3 = \frac{2618}{2187} * x^2$
- ▶ $C4 = \frac{6545}{6561} * x^3$
- ▶ $C5 = \frac{1190}{2187} * x^4$
- ▶ $C6 = \frac{374}{2187} * x^5$
- ▶ $C7 = \frac{154}{6561} * x^6$

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{2618}{6561} + \frac{2618}{2187} * x \\ & - \frac{2618}{2187} * x^2 + \frac{6545}{6561} * x^3 \\ & - \frac{1190}{2187} * x^4 + \frac{374}{2187} * x^5 \\ & - \frac{154}{6561} * x^6 \end{aligned}$$

Aufspalten der Formel

Also ist jedes C_i von der Form:

$$C_i = \alpha_j * x^{(i-1)}$$

Aufspalten der Formel

$$\begin{aligned} f(x) &= C1 + C2 \\ &\quad - C3 + C4 \\ &\quad - C5 + C6 \\ &\quad - C7 \end{aligned}$$

Aufspalten der Formel

Und nun:

- ▶ $B1=C1+C2+C4+C6$
- ▶ $B2=C3+C5+C7$

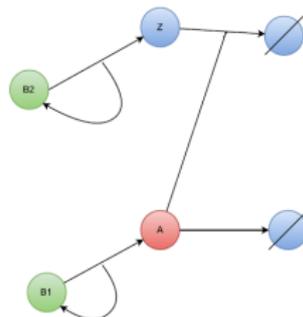
$$\begin{aligned} f(x) &= C1 + C2 \\ &\quad - C3 + C4 \\ &\quad - C5 + C6 \\ &\quad - C7 \end{aligned}$$

Aufspalten der Formel

Und somit:

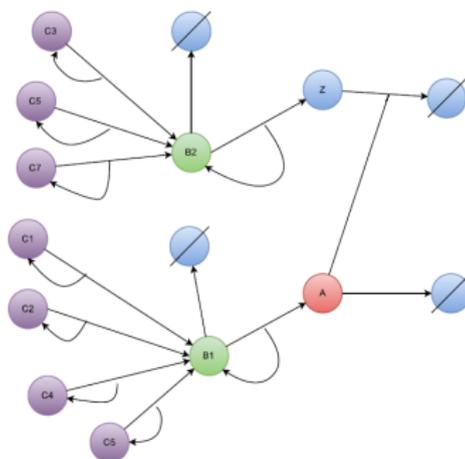
$$f(x) = B1 - B2$$

Erstellen des Modells



$$f(x) = B1 - B2 = A$$

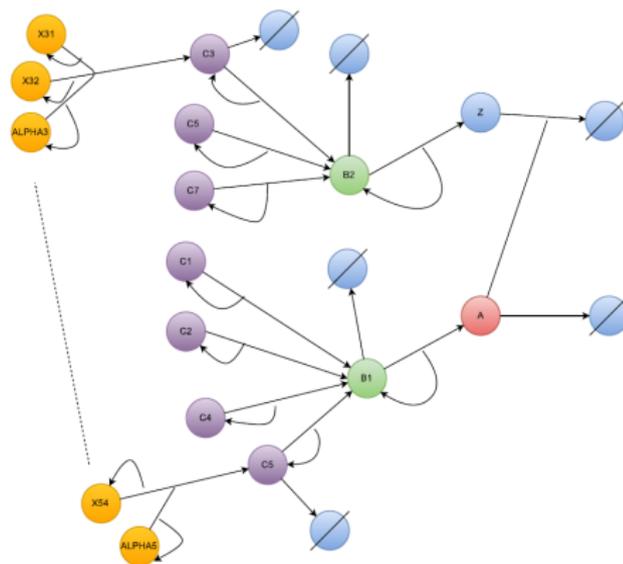
Erstellen des Modells



$$B1 = C1 + C2 + C4 + C6$$

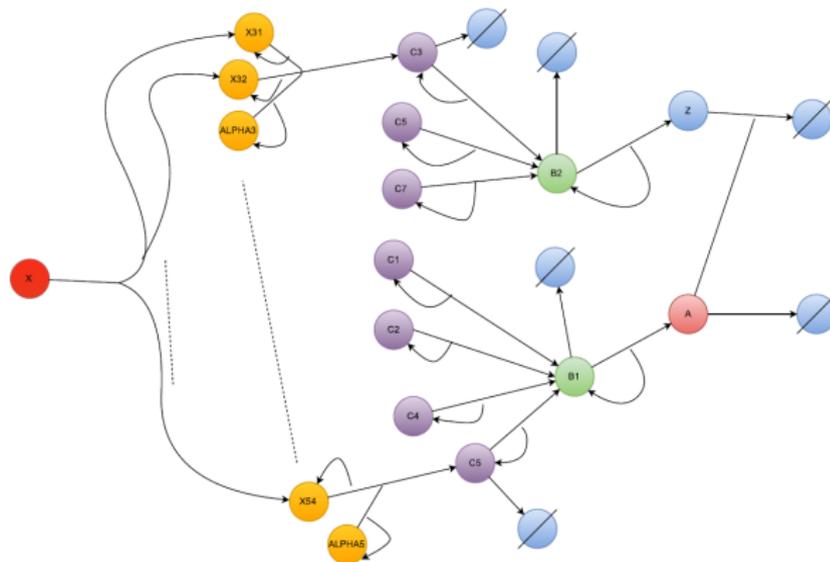
$$B2 = C3 + C5 + C7$$

Erstellen des Modells



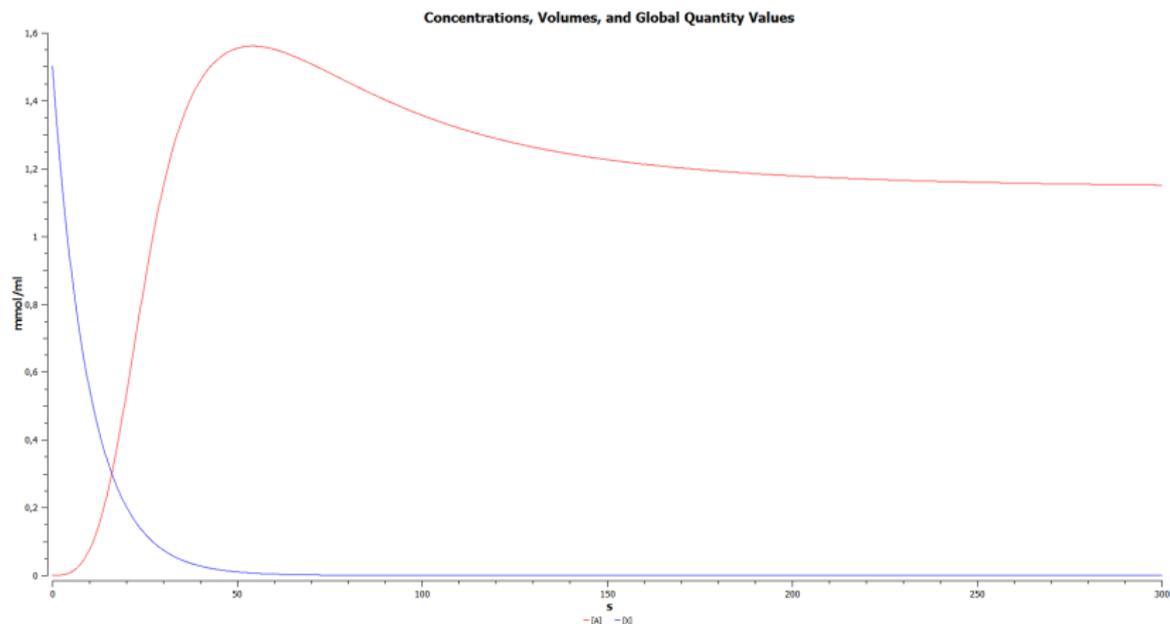
$$C_i = \alpha_i * x^{(i-1)}$$

Erstellen des Modells

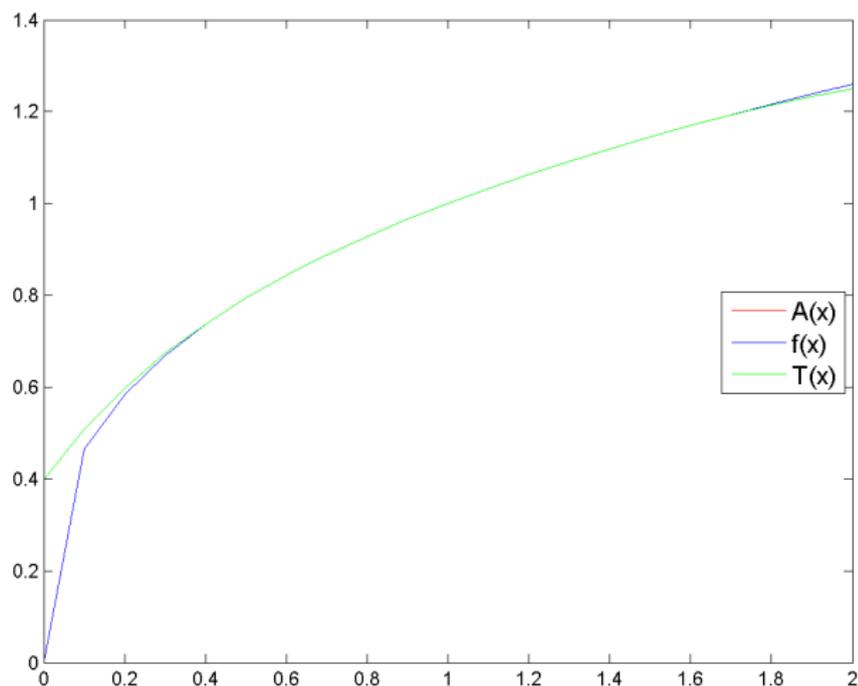


$$X = X_{21} = X_{31} = \dots = X_{54}$$

Ausführung des Modells



Verlauf von A für $x = 1,5$ und $k = 0,1$.



Die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$, die Taylorreihe $T(x)$ und das Analogmodell $A(x)$ im Vergleich.

Genauigkeit

Zur Beurteilung der Genauigkeit dieses Verfahrens suchen wir das Intervall, in welchem der relative Fehler kleiner als 0.001 ist.

x	$f(x)$	$A(x)$	relativer Fehler

Genauigkeit

Zur Beurteilung der Genauigkeit dieses Verfahrens suchen wir das Intervall, in welchem der relative Fehler kleiner als 0.001 ist.

x	$f(x)$	$A(x)$	relativer Fehler
4	1,58701	0	1

Genauigkeit

Zur Beurteilung der Genauigkeit dieses Verfahrens suchen wir das Intervall, in welchem der relative Fehler kleiner als 0.001 ist.

x	$f(x)$	$A(x)$	relativer Fehler
4	1,58701	0	1
2	1,25992	1,24961	0,00818

Genauigkeit

Zur Beurteilung der Genauigkeit dieses Verfahrens suchen wir das Intervall, in welchem der relative Fehler kleiner als 0.001 ist.

x	$f(x)$	$A(x)$	relativer Fehler
4	1,58701	0	1
2	1,25992	1,24961	0,00818
1,5	1,14471	1,14461	0.000087

Genauigkeit

Zur Beurteilung der Genauigkeit dieses Verfahrens suchen wir das Intervall, in welchem der relative Fehler kleiner als 0.001 ist.

x	f(x)	A(x)	relativer Fehler
4	1,58701	0	1
2	1,25992	1,24961	0,00818
1,5	1,14471	1,14461	0.000087
1,72044	1,19825	1,19705	0,000999328

Anm. $A(1,72044) = A(1,72043) = A(1,72045)$

Genauigkeit

Zur Beurteilung der Genauigkeit dieses Verfahrens suchen wir das Intervall, in welchem der relative Fehler kleiner als 0.001 ist.

x	$f(x)$	$A(x)$	relativer Fehler
4	1,58701	0	1
2	1,25992	1,24961	0,00818
1,5	1,14471	1,14461	0.000087
1,72044	1,19825	1,19705	0,000999328
0,426771	0,75289	0,753643	0,000999905

Anm. $A(1,72044) = A(1,72043) = A(1,72045)$

Laufzeit

Zur Beurteilung der Laufzeit wird nun untersucht ab welchem Zeitpunkt das Verfahren 99% seiner Zielkonzentration erreicht. Insbesondere in Abhängigkeit von k .

Es werden die beiden Randfälle untersucht, 0,426771 und 1,72044. Hierbei wird nun gemessen ab wann das Verfahren die Werte 0,746107 und 1,2090205 über-/unterschreitet.

	0,426771	1,72044
$k = 0,01$		
$k = 0,1$		
$k = 1$		

Laufzeit

Zur Beurteilung der Laufzeit wird nun untersucht ab welchem Zeitpunkt das Verfahren 99% seiner Zielkonzentration erreicht. Insbesondere in Abhängigkeit von k .

Es werden die beiden Randfälle untersucht, 0,426771 und 1,72044. Hierbei wird nun gemessen ab wann das Verfahren die Werte 0,746107 und 1,2090205 über-/unterschreitet.

	0,426771	1,72044
$k = 0,01$	687 Sekunden	3335 Sekunden
$k = 0,1$		
$k = 1$		

Laufzeit

Zur Beurteilung der Laufzeit wird nun untersucht ab welchem Zeitpunkt das Verfahren 99% seiner Zielkonzentration erreicht. Insbesondere in Abhängigkeit von k .

Es werden die beiden Randfälle untersucht, 0,426771 und 1,72044. Hierbei wird nun gemessen ab wann das Verfahren die Werte 0,746107 und 1,2090205 über-/unterschreitet.

	0,426771	1,72044
$k = 0,01$	687 Sekunden	3335 Sekunden
$k = 0,1$	69 Sekunden	334 Sekunden
$k = 1$		

Laufzeit

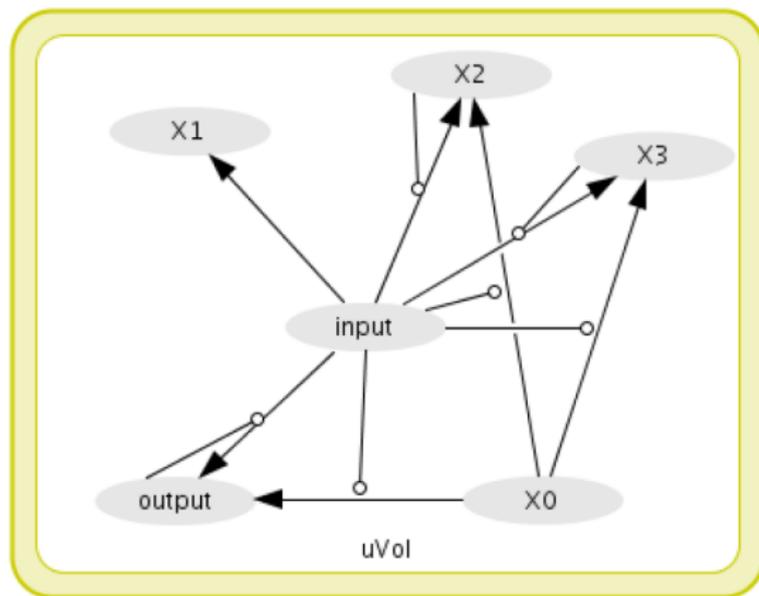
Zur Beurteilung der Laufzeit wird nun untersucht ab welchem Zeitpunkt das Verfahren 99% seiner Zielkonzentration erreicht. Insbesondere in Abhängigkeit von k .

Es werden die beiden Randfälle untersucht, 0,426771 und 1,72044. Hierbei wird nun gemessen ab wann das Verfahren die Werte 0,746107 und 1,2090205 über-/unterschreitet.

	0,426771	1,72044
$k = 0,01$	687 Sekunden	3335 Sekunden
$k = 0,1$	69 Sekunden	334 Sekunden
$k = 1$	7 Sekunden	34 Sekunden

Geht's besser?

Geht's besser?



T. Lenser, N. Matsumaru, T. Hinze, P. Dittrich. Tracking the Evolution of Chemical Computing Networks. In S. Bullock, J. Noble, R. Watson, M.A. Bedau (Eds.), Proceedings of the Eleventh International Conference on the Simulation and Synthesis of Living Systems (ALife XI), ISBN 978-0-262-75017-2, pp. 343-350, MIT Press, 2008

Noch Fragen?

