

Chomsky-Grammatik zur Logarithmusberechnung

Valentin Wesp, Christoph Saffer und Elina Wiechens

Gliederung

- ▶ Aufgabenstellung
- ▶ Chomsky-Grammatik
- ▶ Anwendung der Chomsky-Grammatik
- ▶ Komplexität
- ▶ Vergleich mit dem numerischen Verfahren

Aufgabenstellung

- ▶ Entwicklung einer Chomsky-Grammatik, mit der der nicht-negative Logarithmus $\log_b(n)$ einer beliebig gegebenen natürlichen Zahl n mit $n \geq 1$ zur Basis $b \geq 2$ berechnet wird
- ▶ Gesucht: eine Grammatik G , die folgende Sprache erzeugt:

$$L(G_{|\log|}) = \{a^{\lfloor \log_b n \rfloor} \mid n \in \mathbb{N} \geq 1 \wedge b \in \mathbb{N} \geq 2 \wedge N, B \subseteq \mathbb{N}\}$$

Chomsky - Grammatik

Idee - Allgemeine Grammatik - Regeln

Die Idee

- ▶ Idee: Logarithmus durch **simple Operationen** berechnen
- ▶ Logarithmus: Wie oft muss N durch B geteilt werden bis **Eins** erreicht wird?
- ▶ Division: Wie oft muss B von N abgezogen werden, bis **Null** erreicht wird?

- ▶ Startkodierung von $\log_b n$ in $S_1 = N^n$ und $S_2 = B^b$
- ▶ Startwort: $S \rightarrow LS_1IS_2RD$
- ▶ Terminalsymbole: a

Allgemeine Grammatik

$$G_{[\log]} = (V_1 \cup V_2 \cup \{L, N, I, B, R, D, Z, M, X\}, \{a\}, P'_1 \cup P'_2 \cup \mathbf{R}, S),$$

mit $P'_1 = \{w \rightarrow N \mid w \rightarrow a \in P_1\} \cup (P_1 \setminus \{w \rightarrow a \in P_1\})$
sowie $P'_2 = \{w \rightarrow B \mid w \rightarrow a \in P_2\} \cup (P_2 \setminus \{w \rightarrow a \in P_2\})$

Regeln

1. $S \rightarrow LS_1IS_2RD$
2. $LNIBB \rightarrow X$
3. $XB \rightarrow X$
4. $XRD \rightarrow \varepsilon$
5. $NNIBB \rightarrow NNBB$
6. $NB \rightarrow M$
7. $NMB \rightarrow M$
8. $LMB \rightarrow LM$
9. $NMR \rightarrow NS_2RM$
10. $LMR \rightarrow LRZM$
11. $RZM \rightarrow NRZ$
12. $NNRZD \rightarrow NNS_2RDZ$
13. $LNRZD \rightarrow a$
14. $aZ \rightarrow aa$

Ausnahmen testen - Regel 2 bis 5

1. $S \rightarrow LS_1IS_2RD$
2. $LNIBB \rightarrow X$
3. $XB \rightarrow X$
4. $XRD \rightarrow \varepsilon$
5. $NNIBB \rightarrow NNBB$

- ▶ $N = 1 : \log_b 1 = 0$
- ▶ Regeln 2 bis 4 produzieren ein „leeres Wort“
- ▶ Andere Logarithmus - Ausnahmen müssen nicht berücksichtigt werden, da:
 $n \in N \geq 1 \wedge b \in B \geq 2 \wedge N, B \subseteq \mathbb{N}$
- ▶ Wenn die Ausnahme geprüft wurde, wird das I entfernt und die Berechnung kann beginnen

Division N/B - fortlaufende Subtraktion

6. $NB \rightarrow M$
 7. $NMB \rightarrow M$
 8. $LMB \rightarrow LM$
 9. $NMR \rightarrow NS_2RM$
- ▶ Regel 6 & 7: entferne so viele N 's wie B 's und füge M als Zähler ein
 - ▶ Regel 8: Falls ein Rest entsteht beim Dividieren, d.h. B 's bleiben übrig \rightarrow lösche die übrigen B 's
 - ▶ Sobald der Zähler am rechten Rand angekommen ist, wurde einmal die Subtraktion durchgeführt
 - ▶ Regel 9: füge die Basis wieder ein und verschiebe den Zähler hinter den rechten Rand

Neustart der Division

10. $LMR \rightarrow LRZM$

11. $RZM \rightarrow NRZ$

12. $NNRZD \rightarrow NNS_2RDZ$

- ▶ Regel 10: Wenn eine „Runde“ Division fertig ist, es sind keine N 's oder B 's vorhanden, wird ein neuer Logarithmus Zähler eingefügt: Z
- ▶ Division muss „neugestartet“ werden
- ▶ Regel 11: Für jedes M wird ein neues N eingefügt und am rechten Rand vorbeigeschoben
- ▶ Regel 12: Die Basis wird wieder eingefügt, um Division neu zu starten

Terminierung

13. $LNRZD \rightarrow a$

14. $aZ \rightarrow aa$

- ▶ Sobald keine Reste mehr von einer Division übrig sind kann in Terminalsymbole umgewandelt werden
- ▶ Das erste Terminalsymbol bewirkt die Umwandlung von allen Z 's in Terminalsymbole und die Grammatik terminiert

Anwendung der Chomsky-Grammatik

$$\log_2 8$$

Beispiel - $\log_2 8$ - (1)

$$S_1 = a^8, S_2 = a^2$$

$$S \rightarrow LN^8IB^2RD$$

$$LNNNNNNN\color{blue}NNIB\color{blue}BRD \rightarrow LNNNNNNN\color{blue}NN\color{blue}BBRD$$

$$LNNNNNNN\color{blue}N\color{blue}BBRD \rightarrow LNNNNNNN\color{red}M\color{blue}BRD$$

$$LNNNNNNN\color{blue}M\color{blue}BRD \rightarrow LNNNNNNN\color{blue}M\color{blue}RD$$

$$LNNNNNNN\color{blue}M\color{blue}RD \rightarrow LNNNNNN\color{blue}S_2\color{blue}R\color{blue}MD$$

$$LNNNNNN\color{blue}N\color{blue}B\color{blue}B\color{blue}R\color{blue}M\color{blue}D \rightarrow LNNNNNN\color{blue}M\color{blue}B\color{blue}R\color{blue}M\color{blue}D$$

$$LNNNNN\color{blue}M\color{blue}B\color{blue}R\color{blue}M\color{blue}D \rightarrow LNNNN\color{blue}M\color{blue}R\color{blue}M\color{blue}D$$

$$LNNNN\color{blue}M\color{blue}R\color{blue}M\color{blue}D \rightarrow LNNNN\color{blue}S_2\color{blue}R\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}D$$

- ▶ Initiierung durch das Startwort
- ▶ Regel 5 wird angewendet
- ▶ Regel 6: Subtraktion
- ▶ Regel 7: Subtraktion
- ▶ Regel 9: Subtraktion beginnt neu
- ▶ Regel 6: Subtraktion
- ▶ Regel 7: Subtraktion
- ▶ Regel 9: Subtraktion beginnt neu

Beispiel - $\log_2 8$ - (2)

$LNNN\color{blue}B\color{blue}R\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}D \rightarrow LNNN\color{blue}M\color{blue}B\color{blue}R\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}D$

$LNNN\color{blue}M\color{blue}B\color{blue}R\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}D \rightarrow LNN\color{blue}M\color{blue}R\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}D$

$LNN\color{blue}M\color{blue}R\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}D \rightarrow LNN\color{blue}S_2\color{blue}R\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}D$

$LNN\color{blue}B\color{blue}B\color{blue}R\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}D \rightarrow LN\color{blue}M\color{blue}B\color{blue}R\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}D$

$LN\color{blue}M\color{blue}B\color{blue}R\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}D \rightarrow LM\color{blue}R\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}D$

$LM\color{blue}R\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}D \rightarrow LR\color{blue}Z\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}D$

$LR\color{blue}Z\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}D \rightarrow LNR\color{blue}Z\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}D$

$LNR\color{blue}Z\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}D \rightarrow LNNR\color{blue}Z\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}D$

$LNNR\color{blue}Z\color{blue}M\color{blue}M\color{blue}D \rightarrow LNNNR\color{blue}Z\color{blue}M\color{blue}D$

$LNNNR\color{blue}Z\color{blue}M\color{blue}D \rightarrow LNNNR\color{blue}Z\color{blue}D$

- ▶ Regel 6: Subtraktion
- ▶ Regel 7: Subtraktion
- ▶ Regel 9: Neuanfang der Subtraktion
- ▶ Regel 6: Subtraktion
- ▶ Regel 7: Subtraktion
- ▶ Regel 10: Ende der ersten Division
- ▶ Regel 11: Für jedes M ein neues N
- ▶ Initiierung der nächsten Division

Beispiel - $\log_2 8$ - (3)

$LNNNRZD \rightarrow LNNNS_2RDZ$

$LNNNBBDZ \rightarrow LNNMBRDZ$

$LNNMBRDZ \rightarrow LNNMRDZ$

$LNNMRDZ \rightarrow LNNS_2RMDZ$

$LNNBBRMDZ \rightarrow LNMBRMDZ$

$LNMBRMDZ \rightarrow LMRMDZ$

$LMRMDZ \rightarrow LRZMMDZ$

$LRZMMDZ \rightarrow LNRZMDZ$

$LNRZMDZ \rightarrow LNNRZDZ$

- ▶ Regel 12: Neustart der Division
- ▶ Regel 6: Subtraktion
- ▶ Regel 7: Subtraktion
- ▶ Regel 9: Neustart der Subtraktion
- ▶ Regel 6: Subtraktion
- ▶ Regel 7: Subtraktion
- ▶ Regel 10: Ende der zweiten Division
- ▶ Regel 11: Für jedes M ein neues N
- ▶ Initiierung der nächsten Division

Beispiel - $\log_2 8$ - (4)

$LNNRZDZ \rightarrow LNNS_2RDZZ$

$LNNBBRDZZ \rightarrow LNMBRDZZ$

$LNMBRDZZ \rightarrow LMRDZZ$

$LMRDZZ \rightarrow LRZMDZZ$

$LRZMDZZ \rightarrow LNRZDZZ$

$LNRZDZZ \rightarrow aZZ$

$aZZ \rightarrow aaZ$

$aaZ \rightarrow aaa$

- ▶ Regel 12: Neustart der Division
- ▶ Regel 6: Subtraktion
- ▶ Regel 7: Subtraktion
- ▶ Regel 10: Ende der dritten Division
- ▶ Regel 11: Für jedes M ein neues N
- ▶ Regel 12 funktioniert nicht mehr, da nur noch ein N vorhanden
- ▶ Regel 13 wird angewandt und Terminierung startet mit Regel 14

Komplexität

Speicher und Laufzeit

Speicher

- ▶ Das längste Wort ist das Startwort: $LS_1IS_2RD \rightarrow LN^nIB^bRD$
- ▶ Startwort besitzt die Länge: $n + b + 4$
- ▶ Im Weiteren wird dieses Wort verändert und wird nicht wieder diese Länge erreichen

➔ $O(n + b)$

Laufzeit (1)

- ▶ Wir gehen davon, dass jeder Schritt eine Zeiteinheit ausmacht
- ▶ Startschritt: 1
- ▶ Für jede Division benötigt man $(b + 1) \cdot \left(\frac{n}{b}\right)$ Schritte
- ▶ Anzahl Divisionen: $\left(\sum_{i=1}^{\lceil \log_b n \rceil} (b + 1) \cdot \frac{n}{b^i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{\lceil \log_b n \rceil} b \cdot \frac{n}{b^i}\right) + \left(\sum_{i=1}^{\lceil \log_b n \rceil} \frac{n}{b^i}\right)$
- ▶ Anzahl an Neustart der Division: $\sum_{i=1}^{\lceil \log_b n \rceil} \left(\frac{n}{b^i} + 3\right) = \left(\sum_{i=1}^{\lceil \log_b n \rceil} \frac{n}{b^i}\right) + 3 \cdot \lceil \log_b n \rceil$
- ▶ Runden: $(b - 1) \cdot \lceil \log_b n \rceil$
- ▶ Ende: $\lceil \log_b n \rceil$

Laufzeit (2)

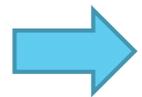
$$1 + \left(\sum_{i=1}^{\lceil \log_b n \rceil} b \cdot \frac{n}{b^i} \right) + 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{\lceil \log_b n \rceil} \frac{n}{b^i} \right) + (b - 1) \cdot \lceil \log_b n \rceil + 4 \cdot \lceil \log_b n \rceil$$

- ▶ Auflösen der ersten beiden Summanden zu:

$$\frac{b \cdot (n-1)}{b-1} + 2 \cdot \frac{n-1}{b-1} = (n-1) \cdot \frac{b+2}{b-1} \leq (n-1) \cdot 4 \in O(n)$$

- ▶ Auflösen der restlichen Terme:

$$(b + 3) \cdot \lceil \log_b n \rceil \in O(b \cdot \log_b n)$$



$$O(n + b \cdot \log_b n)$$

Numerisches Verfahren

Vergleich des Algorithmus mit einem numerischen Verfahren, das auf fortgesetzter Division durch b beruht

Numerisches Verfahren

Berechnung	Zähler
$\log_2 8 = x$	$Z = 0$
$8/2 = 4$	$Z = 1$
$4/2 = 2$	$Z = 2$
$2/2 = 1$	$Z = 3$
$\rightarrow \log_2 8 = Z = 3$	

➔ Laufzeit: $O(\log_b n)$

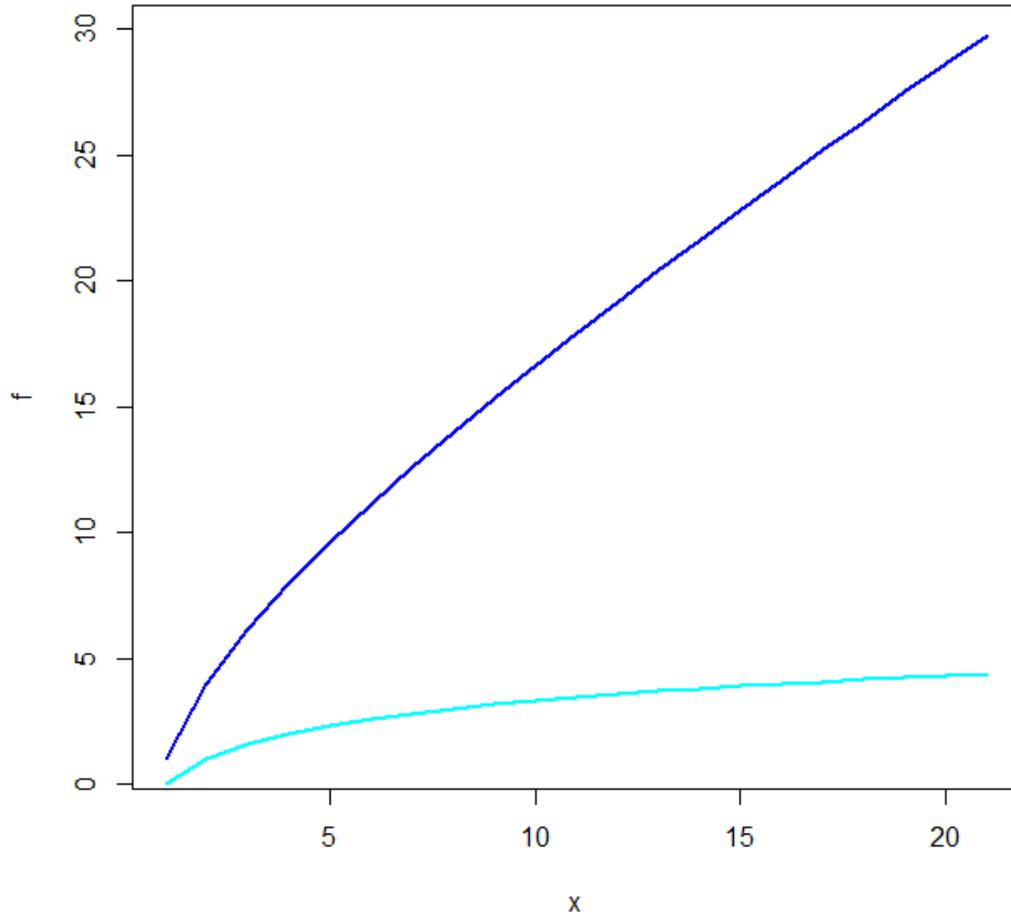
Laufzeitanalyse für $b = 2$

Chomsky-Grammatik

$$O(n + 2 \cdot \log_2 n)$$

Numerisches Verfahren

$$O(\log_2 n)$$



Habt ihr noch Fragen?

Ansonsten, Danke für eure Aufmerksamkeit