
Chomsky-Grammatik zur Erzeugung der 3er-Potenzen

— Laines Schmalwasser & Georg
Reinhardt —

Inhalte

1. Aufgabe
2. Multiplikation bei Chomsky-Grammatiken
3. Die Grammatik
4. Rechenoperationen
5. Parallelisierung

Aufgabe

- Eine **Grammatik G**, die die Zahlenmenge der **3er-Potenzen** generiert
 - $\{n^3 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 8, 27, 64, 125, \dots\}$
 - Die Ausgabe erfolgt als: "", "x", "xxxxxxx", "xx"
 - bzw.: \$\$,\$x\$, \$xxxxxxx\$, \$xx\$
- **Idee: Multiplikation** mit **zwei** Operanden bei Chomsky-Grammatiken lösen, dann erweitern auf **drei** Operanden.

Multiplikation bei Chomsky-Grammatiken

- Wörter der Form $\$L^nR^m\$$
- z.B.: $n=3, m=2$ $\$LLLRR\$$
- n und m sind die Operanden
- **Regeln:** $\{LR \rightarrow RLx, Lx \rightarrow xL, xR \rightarrow Rx, \$R \rightarrow \$, L\$ \rightarrow \$\}$
- **Beispiel:** $\$LLLRR\$ \rightarrow \$LLRLxR\$ \rightarrow \$LRLxLxR\$ \rightarrow \$RLxLxLxR\$ \rightarrow \$LxLxLxR\$$
 $\rightarrow \$LxLxLxRx\$ \rightarrow \$LxLxRLxx\$ \rightarrow \dots \rightarrow \$RLxxLxxLxx\$ \rightarrow \$LxxLxxLxx\$ \rightarrow$
 $\$LxxLxxxLx\$ \rightarrow \$LxxLxxxxL\$ \rightarrow \$LxxLxxxxx\$ \rightarrow \dots \rightarrow \$xxxxxxx\$$
- **Idee:** Jedes **L** muss an jedem **R** mit $LR \rightarrow RLx$ vorbei.

Grammatik: Idee

- Aufbau der drei Faktoren [LLMMRR]
- Multiplikation der Faktoren

Grammatik: n^3

- Startsymbol: {S}
- Variablen: {U, T, L, M, R, B}
- Terminalsymbole: {x, \$}

Grammatik: n^3

Regeln: {

$S \rightarrow \$\$ \mid \$U\$$,

$U \rightarrow TMR \mid TMUR$,

$MT \rightarrow TM$,

$LT \rightarrow TL$,

$\$T \rightarrow \L ,

$MR \rightarrow RMB$,

$LB \rightarrow BLx$,

$MB \rightarrow BM$,

$M\$ \rightarrow \$$,

$LR \rightarrow L$,

$Lx \rightarrow xL$,

$L\$ \rightarrow \$$,

$xB \rightarrow Bx$,

$\$B \rightarrow \$$

}

Beispiel

$S \rightarrow \$\$$

$n = 0$

$S \rightarrow \$U\$ \rightarrow \TMR

$n = 1$

$S \rightarrow \$U\$ \rightarrow \$TMUR\$ \rightarrow \$TMTMRR\$$

$n = 2$

...

...

Beispiel

1. \$TMTMRR\$

MT → TM

2. \$TTMMRR\$

\$T → \$L

3. \$LTMMRR\$

LT → TL

4. \$TLLMRR\$

\$T → \$L

5. \$LLMRR\$

Korrektheit [LLMMRR]

Regeln: {
 $MT \rightarrow TM,$
 $LT \rightarrow TL,$
 $\$T \rightarrow \$L,$
}

- T kann sich nur nach links durch L oder M bewegen
- L wird nur auf am linken Rand durch ein T erzeugt
-
- L steht damit immer links von B

5. \$LLMMRR\$

MR → RMB

6. \$LLMRMBR\$

MR → RMB

7. \$LLRMBMBR\$

3 * MB → BM

8. \$LLRBBMMR\$

MR → RMB

9. \$LLRBBMRMB\$

MR → RMB

10. \$LLRBBRMBMB\$

3 * MB → BM

11. \$LLRBBRBBMM\$

2 * M\$ → \$

12. \$LLRBBRBB\$

LR → L

13. \$LLBBRBB\$

Korrektheit $[n^*(n^*n)]$

n^*n	$n^*(n^*n)$
$LR \rightarrow RLx,$	$MR \rightarrow RMB,$
$Lx \rightarrow xL,$	$MB \rightarrow BM,$
$xR \rightarrow Rx,$	$(\cancel{BR} \rightarrow RB),$
$\$R \rightarrow \$,$	$LR \rightarrow L,$
$L\$ \rightarrow \$$	$M\$ \rightarrow \$,$

Beispiel

13. \$LLBBRBB\$

LB → BLx

14. \$LBLxBRBB\$

LB → BLx

15. \$BLxLxBRBB\$

\$B → \$

16. \$LxLxBRBB\$

3 * Lx → xL

17. \$xxLLBRBB\$

LB → BLx

18. \$xxLBLxRBB\$

LB → BLx

19. \$xxBLxLxRBB\$

Korrektheit [$n^*(n^*n)$]

n^*n	$n^*(n^*n)$
$LR \rightarrow RLx,$	$LB \rightarrow BLx,$
$Lx \rightarrow xL,$	$Lx \rightarrow xL,$
$xR \rightarrow Rx,$	$xB \rightarrow Bx,$
$\$R \rightarrow \$,$	$\$B \rightarrow \$,$
$L\$ \rightarrow \$$	$L\$ \rightarrow \$$

Beispiel

19. \$xxBLxLxRBB\$

20. \$xxBxxLLRBB\$

21. \$xxBxxLLBB\$

22. ...

40. \$xBxxxBxBLxLxx\$

61. \$xxxxxxxxx\$

$3 * Lx \rightarrow xL$

$LR \rightarrow L$

Rechenoperationen

$S \rightarrow U$	1	$O(1)$
$U \rightarrow TMR \mid TMUR$	n	$O(n)$
$MT \rightarrow TM, LT \rightarrow TL, \$T \rightarrow \$L$	$(n^2+n)/2$	$O(n^2)$
1. Multiplikation	$\frac{1}{2}n^2*(n+1) + \frac{1}{2}n^2*(n+1) + 2n$	$O(n^3)$
2. Multiplikation	$\frac{1}{2}n^3*(n^2+1) + \frac{1}{2}n^3*(n+1) + n + n^2$	$O(n^5)$

Operationen: $O(n^5)$

Parallelisierung

- Parallelisierung für mehrere Ergebnisse möglich, beim Erzeugen der Operanden **LMR**
- mehrere Schritte gleichzeitig möglich:
 $\$Bx\mathbf{Bxxx}\mathbf{BxB}LxLxx\$ \rightarrow \$B\mathbf{Bxxx}\mathbf{BxB}LxLxx\$$
 $x\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}x$

Fragen...



Vielen Dank!

Quellen

<https://users.fmi.uni-jena.de/~hinze/slides-tt04.pdf>

<http://cmc11.uni-jena.de/hinze/vortrag-gerst-lataretu.pdf>