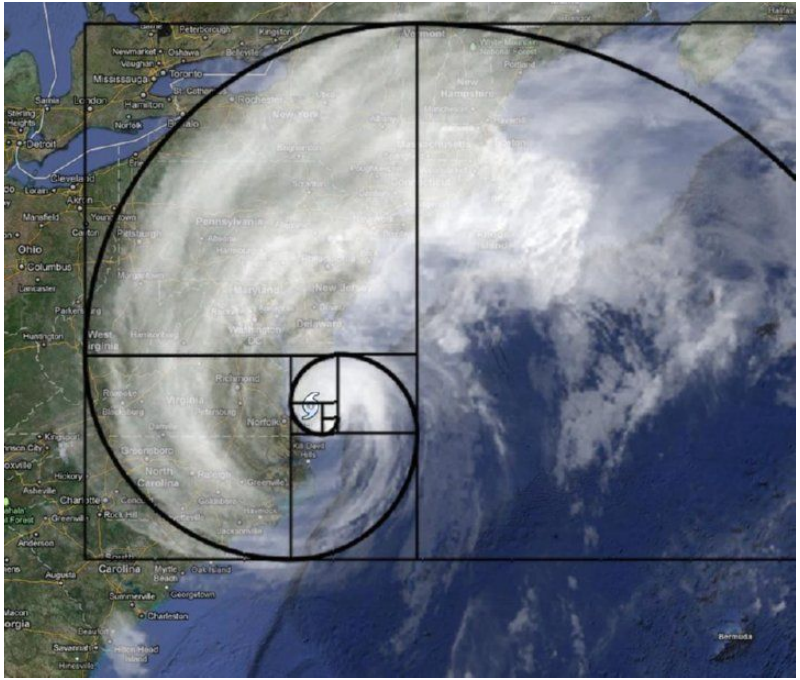
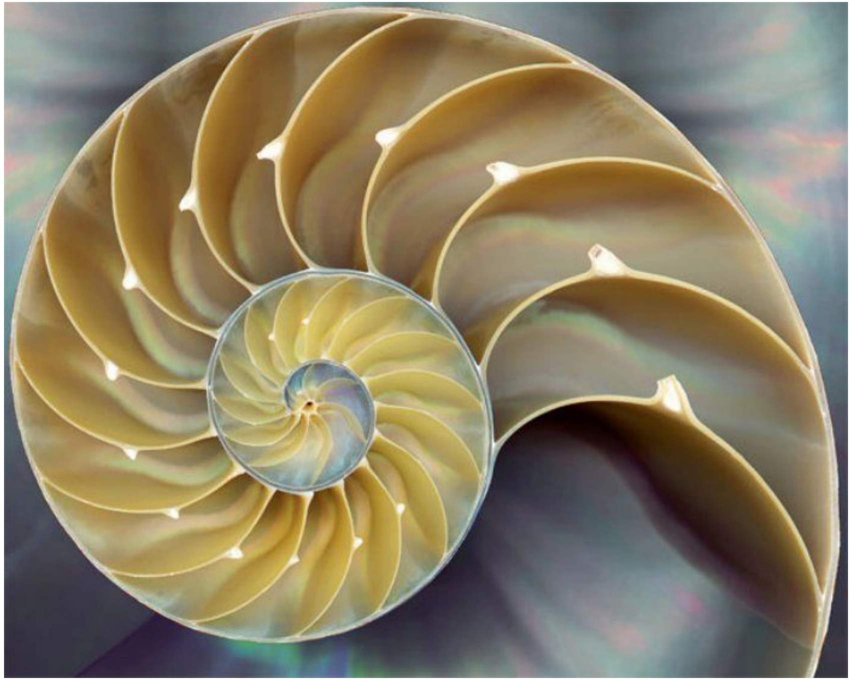
Entwicklung, Simulation und Auswertung eines chemischen Analogcomputermodells zur (näherungsweisen) Berechnung der Fibonacci-Funktion

Felix Roscher, Tycho Kirchner

Die *Fibonacci*-Folge

- 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,...





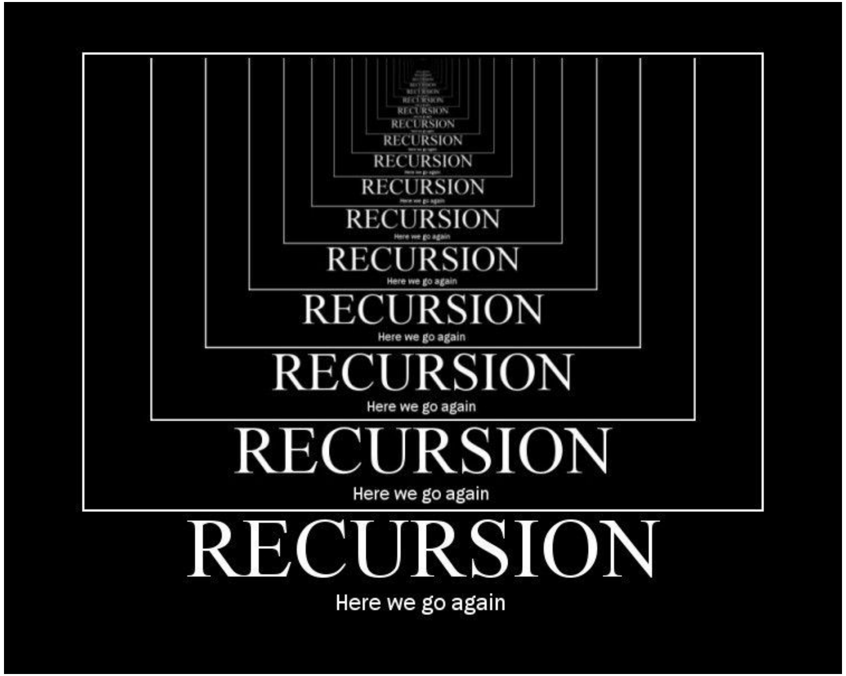
Quelle: https://insteading.com/blog/fibonacci-sequence-in-nature/

Rekursion

fib(0) = 0

fib(1) = 1

fib(n) = fib(n - 1) + fib(n-2) | n ≥ 2

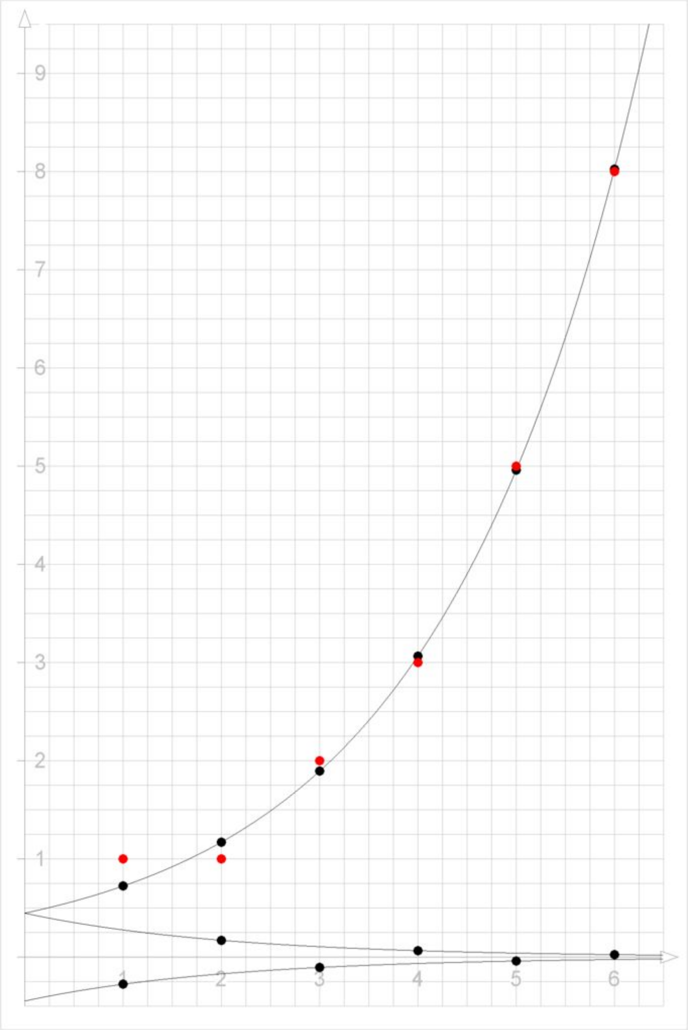


Quelle: blog.angularindepth.com

Explizite Berechnungsvorschrift

Formel von Moivre-Binet

$$\mathrm{fib}(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$



Quelle: de.wikipedia.org/wiki/Datei:Fibonacci_explicit_(detail).png

Beweis - vollständige Induktion (Anfang)

$$\text{fib}(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0$$

Beweis - vollständige Induktion (Schritt 0 → 1)

$$\text{fib}(1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right) = 1$$

Beweis - Induktionsbehauptung

$\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\text{fib}(n + 1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\lambda^{n+1} - \mu^{n+1}\right)$$

Beweis - vollständige Induktion (Schritt n → n + 1)

$\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\text{fib}(n + 1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda^n - \mu^n\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}\right)$$

Beweis - vollständige Induktion (Schritt n → n + 1)

$\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\text{fib(n + 1)} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda^n(1 + 1/\lambda) - \mu^n(1 + 1/\mu))$$

$$1 + 1/\lambda = \lambda$$

$$1 + 1/\mu = \mu$$

Beweis - vollständige Induktion (Schritt n → n + 1)

$\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\text{fib}(n + 1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\lambda^{n+1} - \mu^{n+1}\right)$$

$\square$

Potenzrechnung mit Stoffkonzentrationen?

Taylorreihe für Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$a^x = e^{x \cdot \ln a} = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \dots$$

Potenzrechnung mit Stoffkonzentrationen?

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$a^x = e^{x \cdot \ln a} = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \ldots$$

fib(n) $= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$

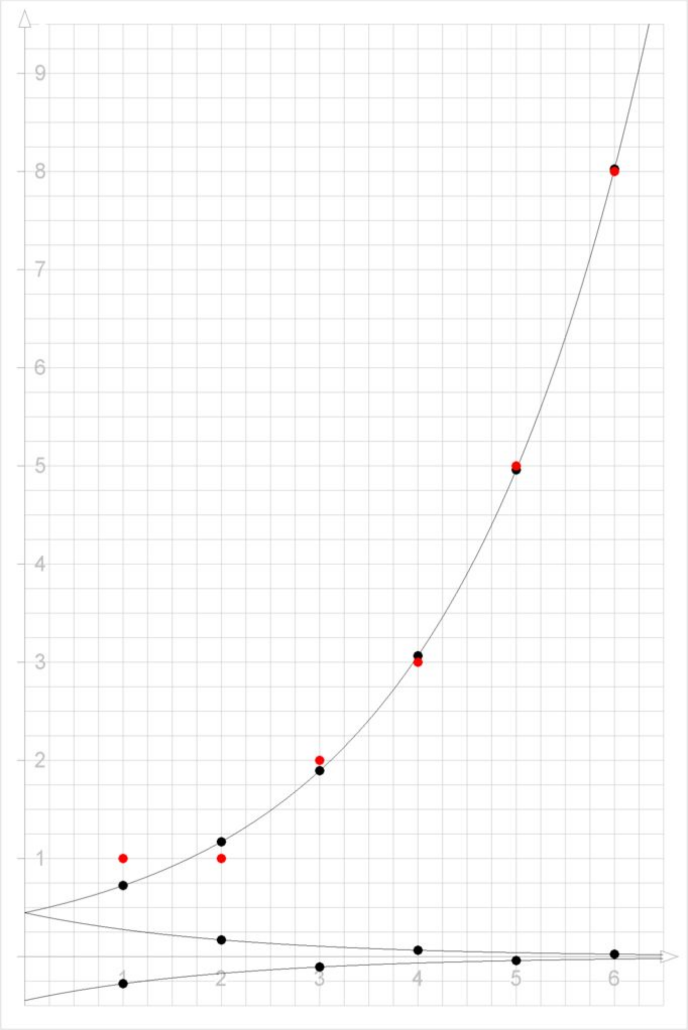
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62 \qquad \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}62$$

Potenzrechnung mit Stoffkonz.?

$$a^x = e^{x \cdot \ln a} = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \ldots$$

fib(n) $= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62$ $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}62$



Umsetzung in Copasi

explizite Formel mit Potenz

→ Annäherung mit Taylorpolynom (Grad 7)

Rechenoperationen:

- Addition
- Subtraktion
- Multiplikation
- Division

Umsetzung in Copasi

42 Spezien

65 Reaktionen

Stoffreaktionen als Konstanten:

- 1
- $\sqrt{5}$
- Fakultäten bis 6!
- $ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^i, i \in \{2, ..., 6\}$

Eingabe von n für fib(n) über Regulation der Konzentration

Umsetzung in Copasi - Taylor 1

$$\frac{(n \cdot n^{i-1}) \cdot ln(...)}{n!}$$

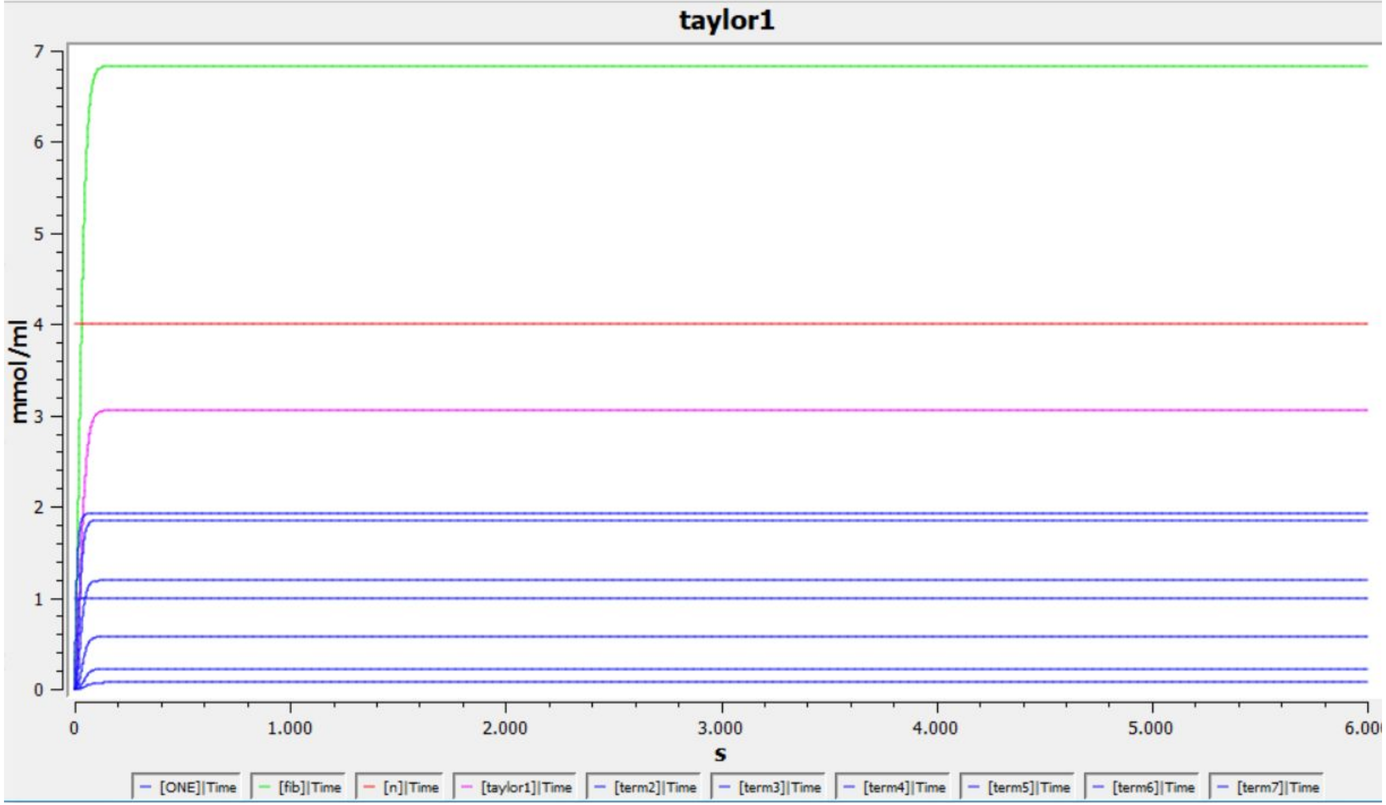
Berechnung der einzelnen Summanden

- n^i
- Produkt mit $ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^i, i \in \{2, ..., 6\}$
- Division durch $i!$

Addieren der Summanden

Division durch $\sqrt{5}$

Umsetzung in Copasi - Taylor 1



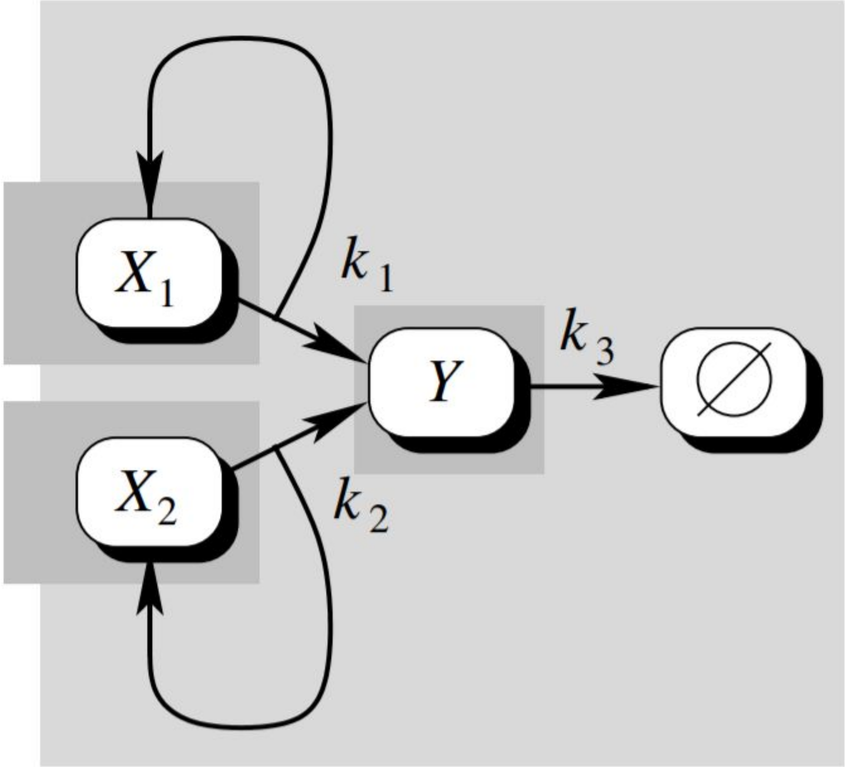
Summe

n

Taylor 1

einzelne Summanden

Umsetzung in Copasi - Addition



X1 + X2 = Y

X1 → X1 + Y
X2 → X2 + Y
Y → W

- Summanden unabhängig voneinander
- Möglichkeit einfacherer Aneinanderkettung

Umsetzung in Copasi - Taylor 2

Summanden/Terme aus Berechnung von Taylor 1

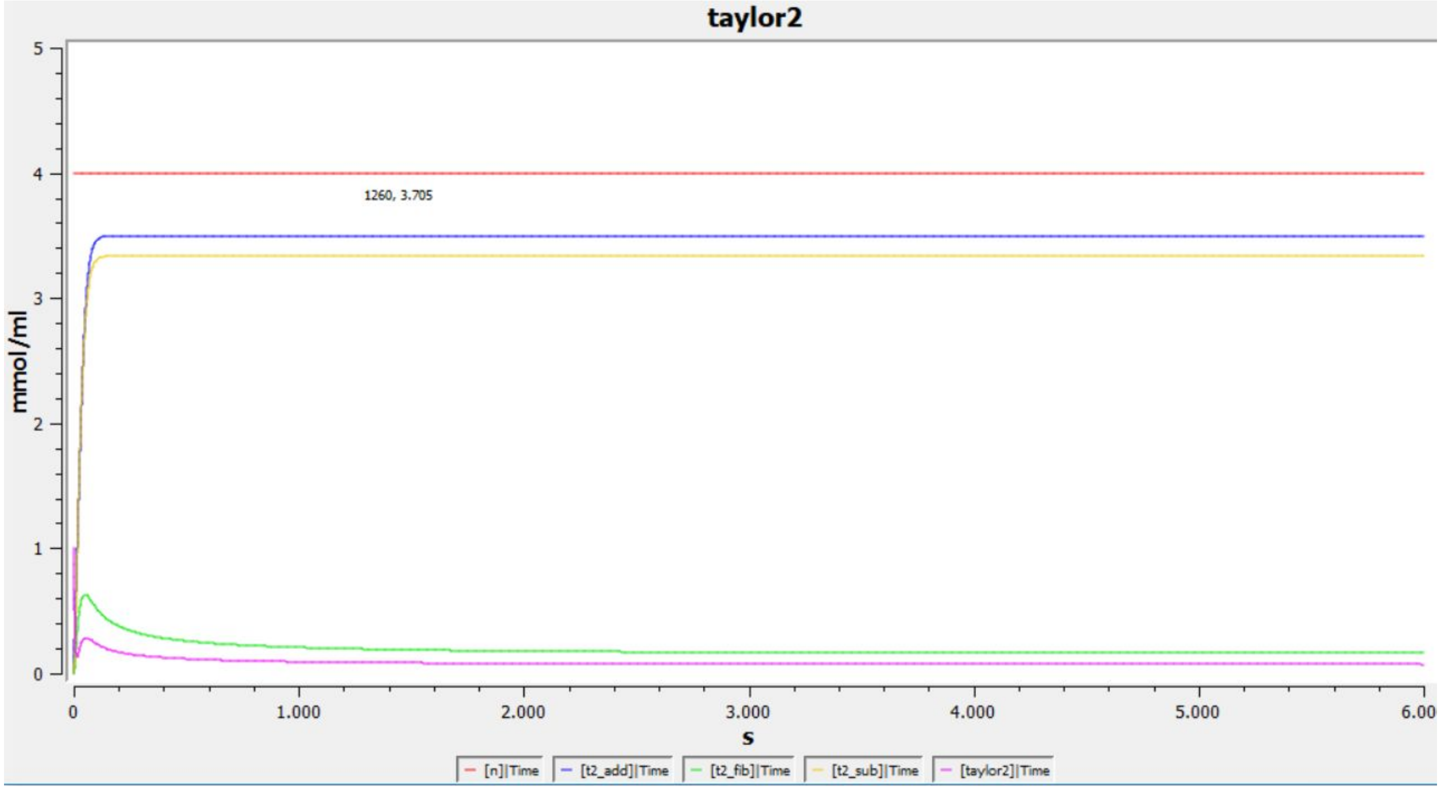
Taylor 2 = (1 - Sum2 + Sum3 - Sum4 + Sum5 - Sum6 + Sum7 + …) / $\sqrt{5}$

Sum2 $\approx$ 1,92484

→ 1 - Sum2 < 0, aber keine neg. Stoffkonzentrationen

Taylor2 = [(1 + Sum3 + Sum5 + Sum7) - (Sum2 + Sum4 + Sum6)] / $\sqrt{5}$

Umsetzung in Copasi - Taylor 2



n

Summe Add.

Summe Sub.

Differenz

Taylor2

Umsetzung in Copasi - Fibonacci Ausgabe

Wenn n gerade bzw (n mod 2) = 0

fib(n) = Taylor1 - Taylor2

Wenn n ungerade bzw (n mod 2) = 1

fib(n) = Taylor1 + Taylor2

Problem: Test auf gerade Zahl mittels chemischen Rechnen

Alternative: Kaufmännisches Runden von Taylor1 und Wegfallen von Taylor2

(Für Genauigkeit 7 stimmt bei kleinen n nicht immer)

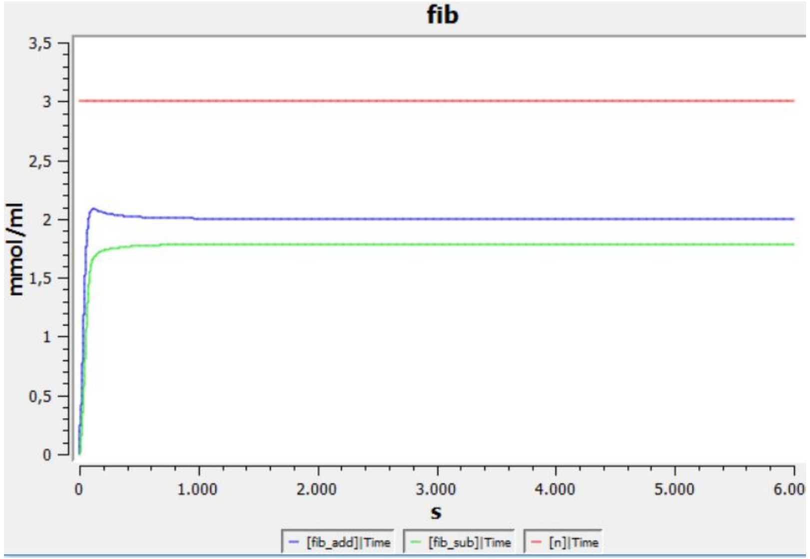
Umsetzung in Copasi - Fibonacci Ausgabe

Problem der Erkennung von geraden bzw ungeraden Zahlen

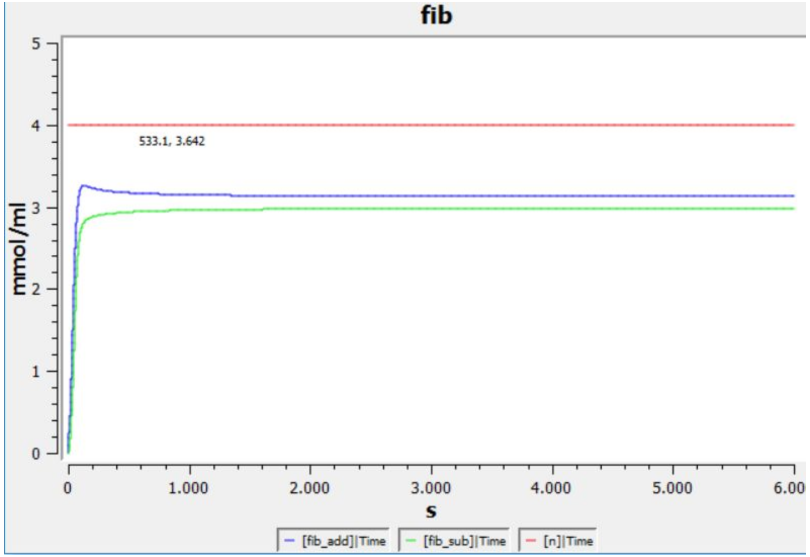
- Bei Eingabe von n mit 2n und 2n+1 rechnen
  - Rückgabe von fib(2n) und fib(2n+1) statt fib(n)
- Ausgeben von Taylor1 + Taylor2 sowie Taylor1 - Taylor2
  - Nur eine Rechenoperation mehr
  - Muss Taylor2 addiert/subtrahiert werden (gerade/ungerade)?

Umsetzung in Copasi - Fibonacci Ausgabe

n = 3



n = 4



n

Taylor1 + Taylor2

Taylor1 - Taylor2

Demo

http://copasi.org/images/COPASI-light.png