

Chomsky-Grammatiken

ZUR ERZEUGUNG DER ZAHLENSUMMEN, FAKULTÄTS- UND
PRIMZAHLEN

Pauline Putzmann, Alicia Hiemisch, Muriel Ritsch 25.06.2018

Gliederung

1. Einführung
2. Multiplikation*
3. Zahlensumme
4. Fakultät
5. Division*
6. Primzahlen



*Eine DNA-Arithmetik auf der Basis von Chomsky-Grammatiken
(Thomas Hinze, Monika Sturm)

https://www.google.de/search?sa=G&hl=de&q=strukturieren&tbm=isch&tbs=simg:CAQSlgEJONmYWnYmUJEaigELEKjU2AQaBAGUCAoMCxCwjKcIGmEKXwgDEifqE8IIoQbpE1_1rE4EU1BPYHcMIuTaMOJQnxifFN5g1pzSJOJQ-njQaMM3Two3gRjGplqnT9ZINZbUh4R24pW7VY2QDSrsRqYHaG1tRB47t3gy8M-zrnvhoQCAEDAsQjq7-CBoKCggIARIEY0pMUgw&ved=0ahUKEwjHkteliODbAhUOalAKHddGDTQQwg4IJCgA,19.06.18

Formale Grammatiken

$G = (V, T, P, S)$

- V endliche Symbolmenge (Nichtterminale)
- T endliches Alphabet (Terminale)
- P endliche Menge von Produktionsregeln
- S Startsymbol

Die von G erzeugten Wörter bilden die Sprache $L(G)$.

$$L(G) = \{ w \in T^* \mid S \xrightarrow{P} w \}$$

Beispiel: Erzeugen aller Palindrome

$G = (V, T, P, S)$

- $V = \{S\}$
- $T = \{a, b\}$
- $P = \{S \rightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \varepsilon\}$
- $S = \{S\}$

S
 \downarrow
 $a\underline{S}a$
 \downarrow
 $ab\underline{S}ba$
 \downarrow
 $abbSbba$
 \downarrow
 $abbabba$

Multiplikation*

Multiplikation*

$$G_{\text{mul}} = (\{A, B, D, I, L, R, S\}, \{a\}, P, S)$$

$$P = \{ \quad S \rightarrow LS_1S_2R \quad (1)$$

$$\quad AR \rightarrow R \quad (2)$$

$$\quad AB \rightarrow BID \quad (3)$$

$$\quad DB \rightarrow BD \quad (4)$$

$$\quad IB \rightarrow BID \quad (5)$$

$$\quad ID \rightarrow DI \quad (6)$$

$$\quad IR \rightarrow R \quad (7)$$

$$\quad LB \rightarrow L \quad (8)$$

$$\quad L \rightarrow \varepsilon \quad (9)$$

$$\quad R \rightarrow \varepsilon \quad (10)$$

$$\quad D \rightarrow a \quad \} \quad (11)$$

$$S_1 = A^n$$

$$S_2 = B^m$$

$$n, m \in \mathbb{N}$$

Multiplikation*

$S \rightarrow LS_1S_2R$ (1)

$AR \rightarrow R$ (2)

$AB \rightarrow BID$ (3)

$DB \rightarrow BD$ (4)

$IB \rightarrow BID$ (5)

$ID \rightarrow DI$ (6)

$IR \rightarrow R$ (7)

$LB \rightarrow L$ (8)

$L \rightarrow \varepsilon$ (9)

$R \rightarrow \varepsilon$ (10)

$D \rightarrow a$ (11)

2×3

S

\downarrow (1)

$L\underline{S}_1\underline{S}_2R$

\downarrow

LAABBRR

Multiplikation*

$S \rightarrow LS_1S_2R$ (1)

$AR \rightarrow R$ (2)

$AB \rightarrow BID$ (3)

$DB \rightarrow BD$ (4)

$IB \rightarrow BID$ (5)

$ID \rightarrow DI$ (6)

$IR \rightarrow R$ (7)

$LB \rightarrow L$ (8)

$L \rightarrow \varepsilon$ (9)

$R \rightarrow \varepsilon$ (10)

$D \rightarrow a$ (11)

LAABBBR

↓ (3)

LABIDBBR

↓ 2x (4)

LABIBBDR

↓ (5)

LABBIDDR

↓ (4)

LABBIBDDR

↓ (5)

LABBBIDDDR

↓ 3x (6)

LABBBDDDIR

↓ (7)

LABBBDDDR

Multiplikation*

$S \rightarrow LS_1S_2R$ (1)

$AR \rightarrow R$ (2)

$AB \rightarrow BID$ (3)

$DB \rightarrow BD$ (4)

$IB \rightarrow BID$ (5)

$ID \rightarrow DI$ (6)

$IR \rightarrow R$ (7)

$LB \rightarrow L$ (8)

$L \rightarrow \varepsilon$ (9)

$R \rightarrow \varepsilon$ (10)

$D \rightarrow a$ (11)

LABBBDDDR

↓

...

↓

LBBDDDDDDR

↓ 3x(8)

LDDDDDDR

↓ (9)(10)

DDDDDD

↓ (11)

aaaaaa

Zahlensumme

Zahlensumme

1 3 6 10 15 21 28 36 ...

$$\rightarrow \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{Gaußsche Summenformel})$$

Gesucht: Grammatik, die alle Wörter der Form $a \frac{n(n+1)}{2}$ erzeugt.

Zahlensumme

$G = (\{A, B, D, I, L, R, S\}, \{a\}, P, S)$

$P = \{ \quad S \rightarrow LAS'R \mid a \mid \varepsilon \quad (1)$

$\quad S' \rightarrow AS'B \mid \varepsilon \quad (2)$

$AR \rightarrow R \quad (3)$

$AB \rightarrow BID \quad (4)$

$DB \rightarrow BD \quad (5)$

$IB \rightarrow BID \quad (6)$

$ID \rightarrow DI \quad (7)$

$IR \rightarrow R \quad (8)$

$LB \rightarrow L \quad (9)$

$L \rightarrow \varepsilon \quad (10)$

$DD \rightarrow a \quad (11)$

Zahlensumme

$S \rightarrow LAS'R \mid a \mid \varepsilon$ (1)

$S' \rightarrow AS'B \mid \varepsilon$ (2)

$AR \rightarrow R$ (3)

$AB \rightarrow BID$ (4)

$DB \rightarrow BD$ (5)

$IB \rightarrow BID$ (6)

$ID \rightarrow DI$ (7)

$IR \rightarrow R$ (8)

$LB \rightarrow L$ (9)

$L \rightarrow \varepsilon$ (10)

$R \rightarrow \varepsilon$ (11)

$DD \rightarrow a$ (12)

n = 4

S

↓ (1)

LAS'R

↓ (2)

LAAAAS'BBBBR

↓ (2)

LAAAAABBBBR

Zahlensumme

$$S \rightarrow LAS'R \mid a \mid \varepsilon \quad (1)$$

$$S' \rightarrow AS'B \mid \varepsilon \quad (2)$$

$$AR \rightarrow R \quad (3)$$

$$AB \rightarrow BID \quad (4)$$

$$DB \rightarrow BD \quad (5)$$

$$IB \rightarrow BID \quad (6)$$

$$ID \rightarrow DI \quad (7)$$

$$IR \rightarrow R \quad (8)$$

$$LB \rightarrow L \quad (9)$$

$$L \rightarrow \varepsilon \quad (10)$$

$$R \rightarrow \varepsilon \quad (11)$$

$$DD \rightarrow a \quad (12)$$

$$\mathbf{n = 4}$$

LAAAAABBBBR

↓ (Multiplikation)

$$D^{20}$$

↓ (11)

$$a^{10}$$

Zahlensumme

$$S \rightarrow LAS'R \mid a \mid \varepsilon \quad (1)$$

$$S' \rightarrow AS'B \mid \varepsilon \quad (2)$$

$$AR \rightarrow R \quad (3)$$

$$AB \rightarrow BID \quad (4)$$

$$DB \rightarrow BD \quad (5)$$

$$IB \rightarrow BID \quad (6)$$

$$ID \rightarrow DI \quad (7)$$

$$IR \rightarrow R \quad (8)$$

$$LB \rightarrow L \quad (9)$$

$$L \rightarrow \varepsilon \quad (10)$$

$$R \rightarrow \varepsilon \quad (11)$$

$$DD \rightarrow a \quad (12)$$

Jedes Wort der Form $a^{\frac{n(n+1)}{2}}$ kann erzeugt werden.

- Anwenden der Regel (2) beliebig oft möglich \rightarrow erzeugt B^n für alle $n \in \mathbb{N}$

Jedes erzeugte Wort hat die Form $a^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

- Regel (1) und (2) garantieren:
 $\#A = \#B + 1$
- Multiplikation ist korrekt
- Regel (12) garantiert das Halbieren

Fakultät

Fakultät

- Mathematische Funktion: $n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n = \prod_{k=1}^n k$
- $0! = 1$
- Fakultätswerte: 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040
- Beispiel: $5! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120$

Idee

Berechnung der Fakultät rekursiv: 5!

$$\begin{array}{c} 5 * 4 * 3 * 2 * 1 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ 20 * 3 * 2 * 1 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ 60 * 2 * 1 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ 120 * 1 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ 120 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\left(\left(5 * 4 \right) * 3 \right) * 2 \right)$$

Hilfsfunktion

Gesucht: $L A^n Y B^{n-1} X A^{n-2} \dots (A \parallel B)^2 X$

Beispiel: LAAAAAYBBBBXAAAXBBX

- $L \rightarrow ((($
- $A/B \rightarrow$ Zahlen (abhängig von der Anzahl)
- $Y \rightarrow *$
- $X \rightarrow)*$

Regelmenge für Hilfsfunktion

$$S \rightarrow LA'S' \quad (0) \quad A'A''X \rightarrow AAXB''X \quad (6)$$

$$S' \rightarrow A'S' \mid A''Y \quad (1) \quad A'X \rightarrow AXB' \quad (7)$$

$$A'A''Y \rightarrow AAYB''X \quad (2) \quad A'A \rightarrow AA' \quad (8)$$

$$A'Y \rightarrow AYB' \quad (3) \quad XA'A''X \rightarrow XAAX \quad (9)$$

$$YA'A''X \rightarrow YAAX \quad (4) \quad B'B''X \rightarrow BBXA''X \quad (10)$$

$$YB'B''X \rightarrow YBBX \quad (5) \quad B'X \rightarrow BXA' \quad (11)$$

$$B'B \rightarrow BB' \quad (12)$$

$$XB'B''X \rightarrow XBBX \quad (13)$$

Regelmenge für Hilfsfunktion

$S \rightarrow LA'S'$	(0)	$A'A''X \rightarrow AAXB''X$	(6)
$S' \rightarrow A'S' \mid A''Y$	(1)	$A'X \rightarrow AXB'$	(7)
$A'A''Y \rightarrow AAYB''X$	(2)	$A'A \rightarrow AA'$	(8)
$A'Y \rightarrow AYB'$	(3)	$XA'A''X \rightarrow XAAX$	(9)
$YA'A''X \rightarrow YAAX$	(4)	$B'B''X \rightarrow BBXA''X$	(10)
$YB'B''X \rightarrow YBBX$	(5)	$B'X \rightarrow BXA'$	(11)
		$B'B \rightarrow BB'$	(12)
		$XB'B''X \rightarrow XBBX$	(13)

Schwarz... Start
Blau... erster Schritt um kleiner
Zahl zu erzeugen
Grün... Übertragung
Rot... Abbruchbedingung
Orange... Vertauschungsregel

Und jetzt?

Ergebnis: $L A^n Y B^{n-1} X A^{n-2} \dots (A \parallel B)^2 X$

$$Y \rightarrow \varepsilon \quad (14)$$

$$X \rightarrow R \quad (15)$$

Multiplikation (Wiederverwendung)

$$AB \rightarrow BID \quad (16)$$

$$DB \rightarrow BD \quad (17)$$

$$IB \rightarrow BID \quad (18)$$

$$ID \rightarrow DI \quad (19)$$

$$IR \rightarrow R \quad (20)$$

$$LB \rightarrow L \quad (21)$$

Vorbereitung für die nächste Multiplikation

$$DRA \rightarrow AB \quad (22)$$

$$DA \rightarrow AA \quad (23)$$

$$BA \rightarrow BB \quad (24)$$

$$DRB \rightarrow AB \quad (25)$$

Abschluss

$L \rightarrow \varepsilon$ (26)

$R \rightarrow \varepsilon$ (27)

$D \rightarrow a$ (28)



https://www.google.de/search?tbm=isch&q=zeichen+m%C3%A4nnchen+fertig&chips=q:zeichen+m%C3%A4nnchen+fertig,online_chips:m%C3%A4nnchen+haken&sa=X&ved=0ahUKEwitrYGc6NDbAhUEJFAKHZ60Ai0Q4lYILigI&biw=1366&bih=610&dpr=1#imgrc=HU3Aw5RVxmq0sM:

Zusammenfassung Fakultät

$$G = (S, \{A, A', A'', B, B', B'', X, Y, L, R, D, I\}, \{a\}, P)$$

$$S \rightarrow LA'S' \quad (0)$$

$$S' \rightarrow A'S' \mid A''Y \quad (1)$$

$$A'A''X \rightarrow AAXB''X \quad (6)$$

$$A'X \rightarrow AXB' \quad (7)$$

$$A'A \rightarrow AA' \quad (8)$$

$$XA'A''X \rightarrow XAAX \quad (9)$$

$$B'B''X \rightarrow BBXA''X \quad (10)$$

Hilfsfunktion

$$Y \rightarrow \varepsilon \quad (14)$$

$$X \rightarrow R \quad (15)$$

$$AB \rightarrow BID \quad (16)$$

$$DB \rightarrow BD \quad (17)$$

$$IB \rightarrow BID \quad (18)$$

$$ID \rightarrow DI \quad (19)$$

$$IR \rightarrow R \quad (20)$$

$$LB \rightarrow L \quad (21)$$

Umwandlung

Multiplikation

$$DRA \rightarrow AB \quad (22)$$

$$DA \rightarrow AA \quad (23)$$

$$BA \rightarrow BB \quad (24)$$

$$DRB \rightarrow AB \quad (25)$$

$$L \rightarrow \varepsilon \quad (26)$$

$$R \rightarrow \varepsilon \quad (27)$$

$$D \rightarrow a \quad (28)$$

Vorbereitung
Multiplikation

Abschluss

Idee für die Begründung

Jedes Wort der Form $a^{n!}$ kann erzeugt werden.

1 mal $S \rightarrow LAS'$ (0)

$n-2$ mal $S' \rightarrow AS'$ (1)

1 mal $S' \rightarrow A''Y$ (1)

Geht für jedes $n > 2$

Idee für die Begründung

$$G = (S, \{A, A', A'', B, B', B'', X, Y, L, R, D, I\}, \{a\}, P)$$

$S \rightarrow LA'S' \mathbf{aa} \mathbf{a}$ (0)	} Hilfsfunktion	$Y \rightarrow \varepsilon$ (14)	} Umwandlung	$DRA \rightarrow AB$ (22)	} Vorbereitung Multiplikation
$S' \rightarrow A'S' A''Y$ (1)		$X \rightarrow R$ (15)		$DA \rightarrow AA$ (23)	
$A'A''X \rightarrow AAXB''X$ (6)		$AB \rightarrow BID$ (16)	$BA \rightarrow BB$ (24)		
$A'X \rightarrow AXB'$ (7)		$DB \rightarrow BD$ (17)	$DRB \rightarrow AB$ (25)		
$A'A \rightarrow AA'$ (8)		$IB \rightarrow BID$ (18)	$L \rightarrow \varepsilon$ (26)	} Abschluss	
$XA'A''X \rightarrow XAAX$ (9)	$ID \rightarrow DI$ (19)	$R \rightarrow \varepsilon$ (27)			
$B'B''X \rightarrow BBXA''X$ (10)	$IR \rightarrow R$ (20)	$D \rightarrow a$ (28)			
		$LB \rightarrow L$ (21)	} Multiplikation		

Idee für die Begründung

Jedes Wort der Form $a^{n!}$ kann erzeugt werden.

1 mal $S \rightarrow LAS'$ (0)

$n-2$ mal $S' \rightarrow AS'(1)$

1 mal $S' \rightarrow A''Y(1)$

} **Geht für jedes $n > 2$**

- solange Regeln der Hilfsfunktion anwenden, bis nur noch A,B,L,R im Wort
- Rekursive Multiplikation bis Form $LD^{n!}R \rightarrow$ Umwandeln

Idee für die Begründung

Jedes erzeugte Wort hat die Form a^n .

- Gemeinsames Ableiten aller $A' A'' B' B''$ ist zwingend notwendig → Hilfsfunktion ergibt das gewünschte Wort

Idee für die Begründung

$$G = (S, \{A, A', A'', B, B', B'', X, Y, L, R, D, I\}, \{a\}, P)$$

$S \rightarrow LA'S' aa a$ (0)	}	Hilfsfunktion	$Y \rightarrow \varepsilon$ (14)	}	Umwand- lung	$DRA \rightarrow AB$ (22)	}	Vorbereitung Multiplikation
$S' \rightarrow A'S' A''Y$ (1)			$X \rightarrow R$ (15)			$DA \rightarrow AA$ (23)		
$A'A''X \rightarrow AAXB''X$ (6)	$AB \rightarrow BID$ (16)	$BA \rightarrow BB$ (24)						
$A'X \rightarrow AXB'$ (7)	$DB \rightarrow BD$ (17)	}	Multiplikation	$DRB \rightarrow AB$ (25)				
$A'A \rightarrow AA'$ (8)	$IB \rightarrow BID$ (18)			$L \rightarrow \varepsilon$ (26)	}	Abschluss		
$XA'A''X \rightarrow XAAX$ (9)	$ID \rightarrow DI$ (19)			$R \rightarrow \varepsilon$ (27)				
$B'B''X \rightarrow BBXA''X$ (10)	$IR \rightarrow R$ (20)			$D \rightarrow a$ (28)				
	$LB \rightarrow L$ (21)							

Idee für die Begründung

Jedes erzeugte Wort hat die Form a^n .

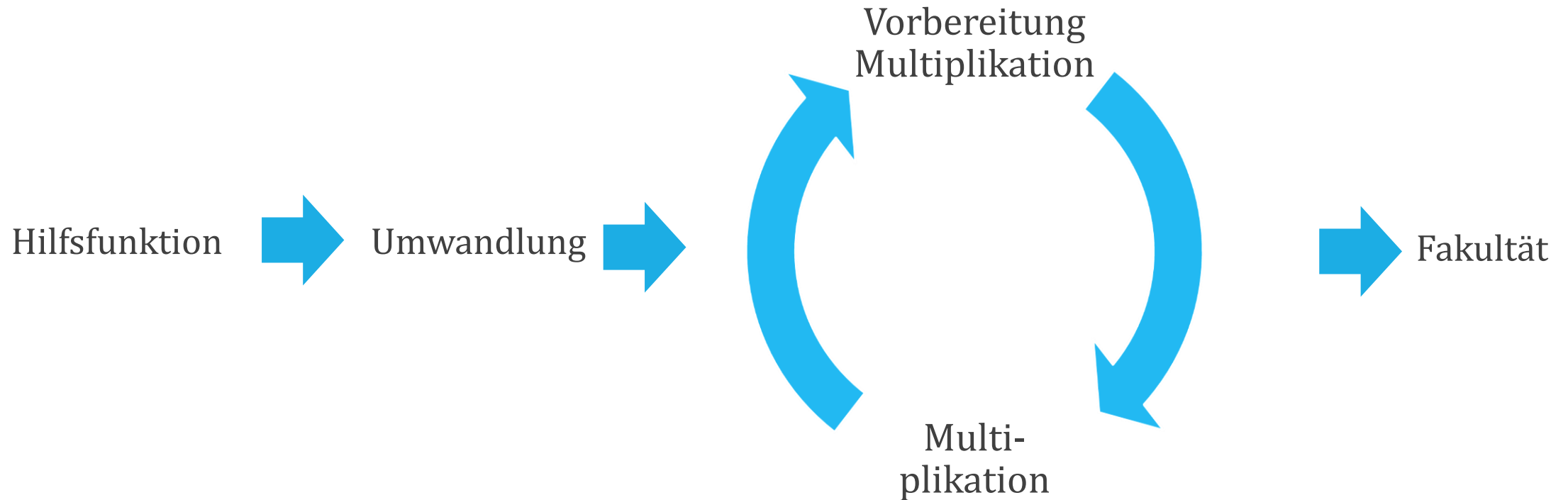
- Gemeinsames Ableiten aller $A' A'' B' B''$ ist zwingend notwendig → Hilfsfunktion ergibt das gewünschte Wort
- Regel 24 verändert die Größe der Summanden nicht
- Beenden der rekursiven Multiplikation ist erforderlich
- Anwenden einer Regel zum falschen Zeitpunkt → keine Terminierung

Idee für die Begründung

$$G = (S, \{A, A', A'', B, B', B'', X, Y, L, R, D, I\}, \{a\}, P)$$

$S \rightarrow LA'S' aa a$ (0)	} Hilfsfunktion	$Y \rightarrow \epsilon$ (14)	} Umwandlung	$DRA \rightarrow AB$ (22)	} Vorbereitung Multiplikation
$S' \rightarrow A'S' A''Y$ (1)		$X \rightarrow R$ (15)		$DA \rightarrow AA$ (23)	
$A'A''X \rightarrow AAXB''X$ (6)	} Multiplikation	$AB \rightarrow BID$ (16)	$BA \rightarrow BB$ (24)		
$A'X \rightarrow AXB'$ (7)		$DB \rightarrow BD$ (17)	$DRB \rightarrow AB$ (25)		
$A'A \rightarrow AA'$ (8)		$IB \rightarrow BID$ (18)	} Abschluss		
$XA'A''X \rightarrow XAAX$ (9)		$ID \rightarrow DI$ (19)		$L \rightarrow \epsilon$ (26)	
$B'B''X \rightarrow BBXA''X$ (10)		$IR \rightarrow R$ (20)		$R \rightarrow \epsilon$ (27)	
	$LB \rightarrow L$ (21)	$D \rightarrow a$ (28)			

Zusammenfassung Fakultät



Division*

Division*

$$G_{\text{div}} = \{ \{A, B, D, L, M, S\}, \{a\}, P, S \}$$

$$P = \{ \quad S \rightarrow LS_1S_2 \quad (1)$$

$$\quad \quad \quad BD \rightarrow DB \quad (2)$$

$$\quad \quad \quad AD \rightarrow M \quad (3)$$

$$\quad \quad \quad AMD \rightarrow M \quad (4)$$

$$\quad \quad \quad MB \rightarrow DBM \quad (5)$$

$$\quad \quad \quad LD \rightarrow L \quad (6)$$

$$\quad \quad \quad LB \rightarrow L \quad (7)$$

$$\quad \quad \quad LB \rightarrow \varepsilon \quad (8)$$

$$\quad \quad \quad M \rightarrow a \quad \} \quad (9)$$

$$S_1 = A^n$$

$$S_2 = (BD)^m$$

$$n, m \in \mathbb{N}, m < n$$

Division*

$G_{\text{div}} = \{ \{A, B, D, L, M, S\}, \{a\}, P, S \}$

$P = \{ S \rightarrow LS_1S_2 \quad (1)$

$BD \rightarrow DB \quad (2)$

$AD \rightarrow M \quad (3)$

$AMD \rightarrow M \quad (4)$

$MB \rightarrow DBM \quad (5)$

$LD \rightarrow L \quad (6)$

$LB \rightarrow L \quad (7)$

$LB \rightarrow \varepsilon \quad (8)$

$M \rightarrow a \quad (9)$

4 : 2

S

↓(3)

↓(1)

LAAAMDBB

LS₁S₂

↓(4)

↓

LAAMBB

LAAABDBD

↓(5)

↓ 3x(2)

LAADBMB

LAAAADBB

Division*

$G_{\text{div}} = \{ \{A, B, D, L, M, S\}, \{a\}, P, S \}$

$P = \{ S \rightarrow LS_1S_2 \quad (1)$

$BD \rightarrow DB \quad (2)$

$AD \rightarrow M \quad (3)$

$AMD \rightarrow M \quad (4)$

$MB \rightarrow DBM \quad (5)$

$LD \rightarrow L \quad (6)$

$LB \rightarrow L \quad (7)$

$LB \rightarrow \varepsilon \quad (8)$

$M \rightarrow a \quad (9)$

LAADBMB

↓ (5)

LAADBDBM

↓ (2)

LAADDBBM

↓ (3)

LAMDBBM

↓ (4)

LMBBM

↓ 2x(5)

LDBDBMM

↓ (8)(9)(10)

MM

↓ (11)

aa

Division*

$G_{\text{div}} = \{ \{A, B, D, L, M, S\}, \{a\}, P, S \}$

$P = \{ S \rightarrow LS_1S_2 \quad (1)$

$BD \rightarrow DB \quad (2)$

$AD \rightarrow M \quad (3)$

$AMD \rightarrow M \quad (4)$

$MB \rightarrow DBM \quad (5)$

$LD \rightarrow L \quad (6)$

$LB \rightarrow L \quad (7)$

$LB \rightarrow \varepsilon \quad (8)$

$M \rightarrow a \quad (9)$

LADBDBMM

↓ (2)

LADDBBMM

↓ (3)

LMDBBMM

↓ (9)

LMDBBaa

Primzahlen

Idee

Hilfsfunktion baut sukzessiv Wörter der Form:

$$L A^n Y B^{n-1} X A^{n-2} \dots (A \parallel B)^2 X$$

Aber: Division statt Multiplikation

→ Modifikation der Hilfsfunktion

Die modifizierte Hilfsfunktion

$G = (\{A, A', A'', B, B', B'', B_2, D, M, O, S, X, Y, Y_2\}, \{a\}, P, S)$

$P = S \rightarrow OA'S \mid OA''X \mid aa \quad (1)$

$A'O \rightarrow OA' \quad (2)$

$A'A \rightarrow AA' \quad (3)$

$A'X \rightarrow AXB' \quad (4)$

$A'A''X \rightarrow AAXB''X \quad (5)$

$B'B \rightarrow BB' \quad (6)$

$B'X \rightarrow BXA' \quad (7)$

$B'B''X \rightarrow BBXA''X \quad (8)$

$XA'A''X \rightarrow XAAX \quad (9)$

$XB'B''X \rightarrow XBBX \quad (10)$

S

$\downarrow 3x(1)$

OA'OA'OA''X

$\downarrow 3x(2)$

000A'A''X

$\downarrow (5)$

0³A''AAXB''X

$\downarrow (3)$

....

Die modifizierte Hilfsfunktion

$$S \rightarrow OA'S \mid OA''X \mid aa \quad (1)$$

$$A'O \rightarrow OA' \quad (2)$$

$$A'A \rightarrow AA' \quad (3)$$

$$A'X \rightarrow AXB' \quad (4)$$

$$A'A''X \rightarrow AAXB''X \quad (5)$$

$$B'B \rightarrow BB' \quad (6)$$

$$B'X \rightarrow BXA' \quad (7)$$

$$B'B''X \rightarrow BBXA''X \quad (8)$$

$$XA'A''X \rightarrow XAAX \quad (9)$$

$$XB'B''X \rightarrow XBBX \quad (10)$$

Erzeugt alle Wörter der Form:

$$O^n A^n X B^{n-1} X A^{n-2} \dots (A \parallel B)^2 X$$

Testen auf Teilbarkeit - Vorbereitung

$$XB \rightarrow XB_2D \quad (11)$$

$$XA \rightarrow XB_2D \quad (12)$$

$$DB \rightarrow DB_2D \quad (13)$$

$$DA \rightarrow DB_2D \quad (14)$$

$$O^5A^5\underline{XB}^4XA^3XB^2X$$

↓ (11)

$$O^5A^5XB_2\underline{DB}^3XA^3XB^2X$$

↓ (13)

$$O^5A^5XB_2DB_2\underline{DB}^2XA^3XB^2X$$

↓ (13)

....

↓

$$O^5A^5X(B_2D)^4XA^3XB^2X$$

↓

....

Testen auf Teilbarkeit - Division

$$AXD \rightarrow AD \quad (15)$$

$$B_2D \rightarrow DB_2 \quad (16)$$

$$AD \rightarrow M \quad (17)$$

$$AMD \rightarrow M \quad (18)$$

$$MB_2 \rightarrow DB_2M \quad (19)$$

$$O^5A^5X(\underline{B_2D})^4X(B_2D)^3X (B_2D)^2X$$

↓ (16)

....

↓

$$O^5\underline{A^5XD^4}(B_2)^4X(B_2D)^3X (B_2D)^2X$$

↓ (15)

$$O^5\underline{A^5D^4}(B_2)^4X(B_2D)^3X (B_2D)^2X$$

↓ (17)

$$O^5A^4MD^3(B_2)^4X(B_2D)^3X (B_2D)^2X$$

Testen auf Teilbarkeit - Division

$$AXD \rightarrow AD \quad (15)$$

$$B_2D \rightarrow DB_2 \quad (16)$$

$$AD \rightarrow M \quad (17)$$

$$AMD \rightarrow M \quad (18)$$

$$MB_2 \rightarrow DB_2M \quad (19)$$

$$O^5 \underline{A^4MD^3} (B_2)^4 X (B_2D)^3 X (B_2D)^2 X$$

↓ (18)

.....

↓

$$O^5 A \underline{M(B_2)}^4 X (B_2D)^3 X (B_2D)^2 X$$

↓ (19)

.....

↓

$$O^5 MD^3 (B_2)^4 M X (B_2D)^3 X (B_2D)^2 X$$

Vorbereitung der nächsten Division

$$\text{OMD} \rightarrow \text{OY} \quad (20)$$

$$\text{YD} \rightarrow \text{Y} \quad (21)$$

$$\text{YM} \rightarrow \text{Y} \quad (22)$$

$$\text{YB}_2 \rightarrow \text{Y} \quad (23)$$

$$\text{OYX} \rightarrow \text{Y}_2\text{AOX} \quad (24)$$

$$\text{OY}_2 \rightarrow \text{Y}_2\text{AO} \quad (25)$$

$$\text{AO} \rightarrow \text{OA} \quad (26)$$

$$\text{Y}_2\text{O} \rightarrow \text{O} \quad (27)$$

$$\underline{\text{O}^5\text{MD}^3}(\text{B}_2)^4\text{MX}(\text{B}_2\text{D})^3\text{X} (\text{B}_2\text{D})^2\text{X}$$

↓ (20)

$$\text{O}^5\underline{\text{YD}^2}(\text{B}_2)^4\text{MX}(\text{B}_2\text{D})^3\text{X} (\text{B}_2\text{D})^2\text{X}$$

↓ (21/23/24)

.....

↓

$$\underline{\text{O}^5\text{YX}}(\text{B}_2\text{D})^3\text{X} (\text{B}_2\text{D})^2\text{X}$$

↓ (24)

$$\text{O}^4\text{Y}_2\text{AOX}(\text{B}_2\text{D})^3\text{X} (\text{B}_2\text{D})^2\text{X}$$

Vorbereitung der nächsten Division

$$\text{OMD} \rightarrow \text{OY} \quad (20)$$

$$\text{YD} \rightarrow \text{Y} \quad (21)$$

$$\text{YM} \rightarrow \text{Y} \quad (22)$$

$$\text{YB}_2 \rightarrow \text{Y} \quad (23)$$

$$\text{OYX} \rightarrow \text{Y}_2\text{AOX} \quad (24)$$

$$\text{OY}_2 \rightarrow \text{Y}_2\text{AO} \quad (25)$$

$$\text{AO} \rightarrow \text{OA} \quad (26)$$

$$\text{Y}_2\text{O} \rightarrow \text{O} \quad (27)$$

$$\underline{\text{O}^4\text{Y}_2\text{AOX}}(\text{B}_2\text{D})^3\text{X}(\text{B}_2\text{D})^2\text{X}$$

↓ (25)

$$\underline{\text{O}^3\text{Y}_2\text{AOAOX}}(\text{B}_2\text{D})^3\text{X}(\text{B}_2\text{D})^2\text{X}$$

↓ 3x(25)

$$\text{Y}_2(\underline{\text{AO}})^5\text{X}(\text{B}_2\text{D})^3\text{X}(\text{B}_2\text{D})^2\text{X}$$

↓ 12x(26)

$$\underline{\text{Y}_2\text{O}^5\text{A}^5\text{X}}(\text{B}_2\text{D})^3\text{X}(\text{B}_2\text{D})^2\text{X}$$

↓ (27)

$$\text{O}^5\text{A}^5\text{X}(\text{B}_2\text{D})^3\text{X}(\text{B}_2\text{D})^2\text{X}$$

Teilbar oder nicht teilbar

Wort \in Prim

- Teilbar nur mit Rest
- Annahme der Form: $O^xMD^yB_2\dots$
- Anwendung Regel 20 (OMD \rightarrow OY)
- Löschen aller weiteren D, M und B_2
- Wiederbeschaffung der A's
- Nächste Division usw.

Wort \notin Prim

- Teilbar ohne Rest
- Normale Division
- Annahme der Form: $O^xMB_2B_2\dots$
- Keine Ableitungsregel anwendbar
 \rightarrow Sackgasse

Die Primzahl erzeugen

$A \rightarrow a$ (28)

$AX \rightarrow a$ (29)

$O \rightarrow \varepsilon$ (30)

O⁵A⁵X

↓ 5x(30)

AAAAAX

↓ (29)

AAAAa

↓ 4x(28)

aaaaa

Funktioniert das?

Jedes Wort der Form a^{Prim} kann erzeugt werden.

Regel 1:

$$S \rightarrow OA'S \mid OA''X \mid aa \quad (1)$$

Erzeugt jede beliebige Zahl $[2, \infty)$

→ alle Primzahlen erzeugbar

Jedes erzeugte Wort hat die Form a^{Prim} .

Regel 20:

$$OMD \rightarrow OY \quad (20)$$

Umwandlung bei Division mit Rest

Sonst: Sackgasse

→ nur Primzahlen erzeugbar

Zusammenfassung Primzahlen

Mod. Hilfsfunktion

$S \rightarrow OA'S \mid OA''X \mid aa$	(1)
$A'O \rightarrow OA'$	(2)
$AA \rightarrow AA'$	(3)
$A'X \rightarrow AXB'$	(4)
$AA''X \rightarrow AAXB''X$	(5)
$B'B \rightarrow BB'$	(6)
$B'X \rightarrow BXA'$	(7)
$B'B''X \rightarrow BBXA''X$	(8)
$XA'A''X \rightarrow XAAX$	(9)
$XB'B''X \rightarrow XBBX$	(10)

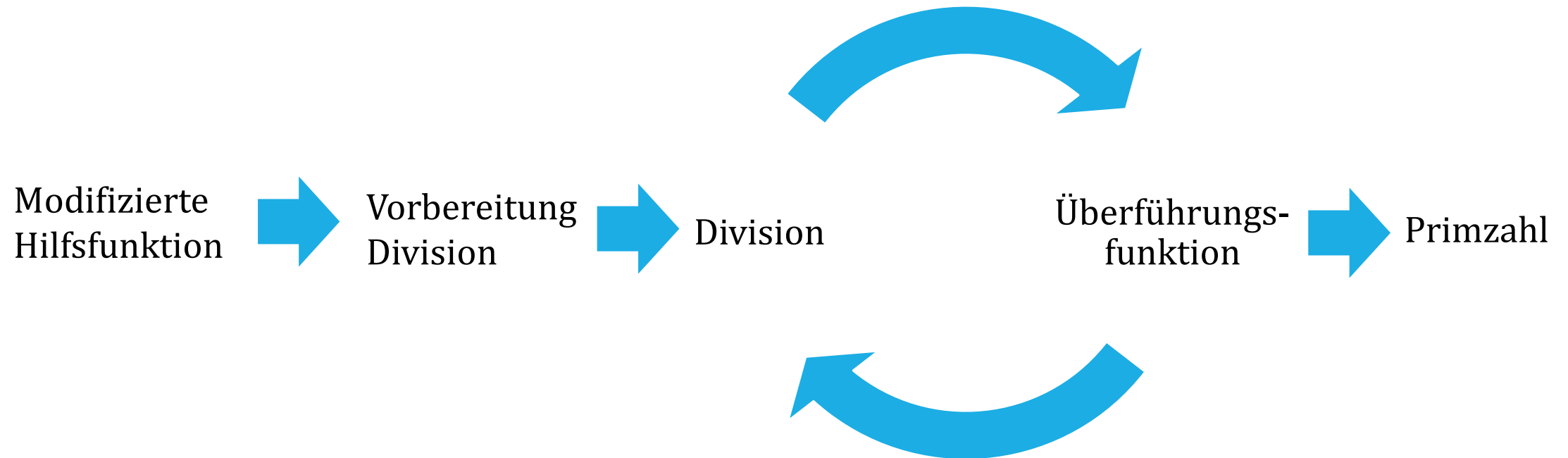
Vorbereitung Division

$XB \rightarrow XB_2D$	(11)
$XA \rightarrow XB_2D$	(12)
$DB \rightarrow DB_2D$	(13)
$DA \rightarrow DB_2D$	(14)
Division	
$AXD \rightarrow AD$	(15)
$B_2D \rightarrow DB_2$	(16)
$AD \rightarrow M$	(17)
$AMD \rightarrow M$	(18)
$MB_2 \rightarrow DB_2M$	(19)

Überföhrungsfunktion

$OMD \rightarrow OY$	(20)
$YD \rightarrow Y$	(21)
$YM \rightarrow Y$	(22)
$YB_2 \rightarrow Y$	(23)
$OYX \rightarrow Y_2AOX$	(24)
$OY_2 \rightarrow Y_2AO$	(25)
$AO \rightarrow OA$	(26)
$Y_2O \rightarrow O$	(27)
Terminierung	
$A \rightarrow a$	(28)
$AX \rightarrow a$	(29)
$O \rightarrow \varepsilon$	(30)

Zusammenfassung Primzahlen



Vielen Dank für Eure
Aufmerksamkeit!
