

Molekulare Algorithmen  
Entwicklung, Simulation und Analyse eines chemischen  
Lotka-Volterra-Systems mit einer Beute- und mehreren  
Räuberspezies

Maria Hinsche und Felix Engelmann

Friedrich-Schiller-Universität Jena

Jena, 2018

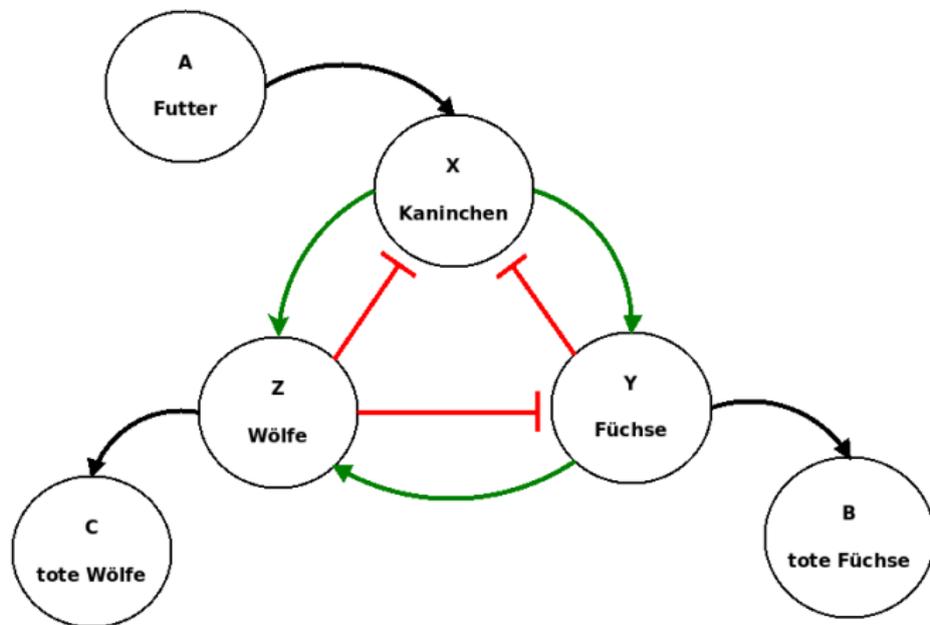
- 1 Uhren- und Oszillationssysteme
- 2 Abbildung eines Ökosystems (Räuber-Beute-Beziehungen)
- 3 Ziel
- 4 Gleichungen des Ökosystems
- 5 Mathematische Heranführung
- 6 Energieerhaltung
- 7 Grenzyklen und Verhalten des Systems außerhalb dieses Bereiches
- 8 Beeinflussung der Oszillationsfrequenz
- 9 Startwerte und Amplitude

Kurze Wiederholung:

- Circadiane Uhren sind Rhythmen mit einer Periodenlänge
- z.B. der Schlaf-Wach-Rhythmus beim Menschen - 24 Stunden
- oder in der Chemie oszillierende Reaktionen

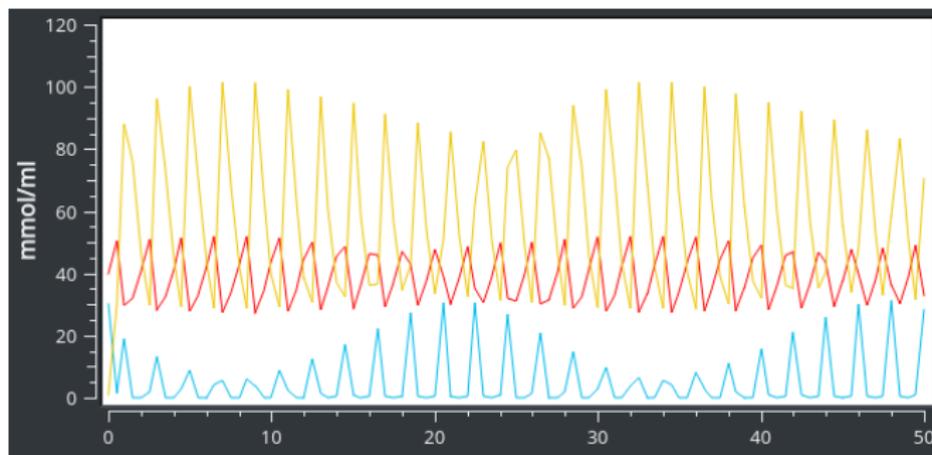
# Abbildung eines Ökosystems

- Speziesgraph



# Ziel der Aufgabe

- es sollte keine Spezies aussterben
- es sollten alle 3 Spezies mit einander wechselwirken
- es sollte eine stabile Oszillation entstehen



# Gleichungen

X = Kaninchen    A = Futter für die Kaninchen

Y = Füchse        B = tote Füchse

Z = Wölfe         C = tote Wölfe

1     $A + X \rightarrow 4X$     Kaninchenpopulation wächst

2     $2X + Y \rightarrow 3Y$     Füchse fressen Kaninchen

3     $Y \rightarrow B$             Füchse sterben

4     $X + Z \rightarrow 2Z$     Wölfe fressen Kaninchen

5     $Y + 3Z \rightarrow 4Z$     Wölfe fressen Füchse

6     $Z \rightarrow C$             Wölfe sterben

# Unbekannte Variablen im Ökosystem

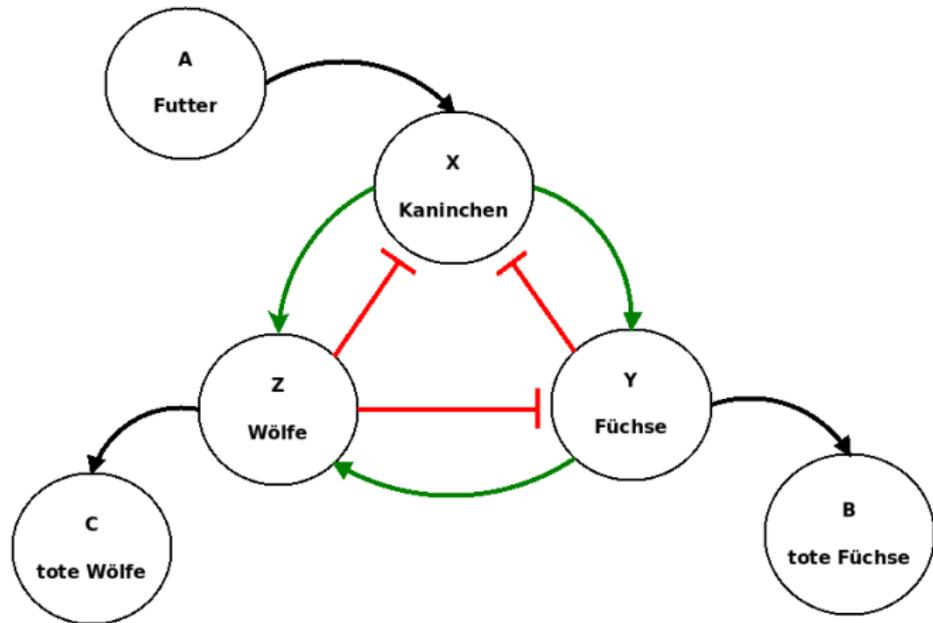
- Ratenkonstante für jede Reaktionsgleichung = 6 Unbekannte
- Startwerte für Kaninchen, Füchse, Wölfe und Nahrung = 4 Unbekannte

- DGS aufstellen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= +a \cdot x & -b \cdot xy & -c \cdot xz \\ \dot{y} &= -d \cdot y & +e \cdot xy & -f \cdot yz \\ \dot{z} &= -g \cdot z & +h \cdot xz & +i \cdot yz\end{aligned}$$

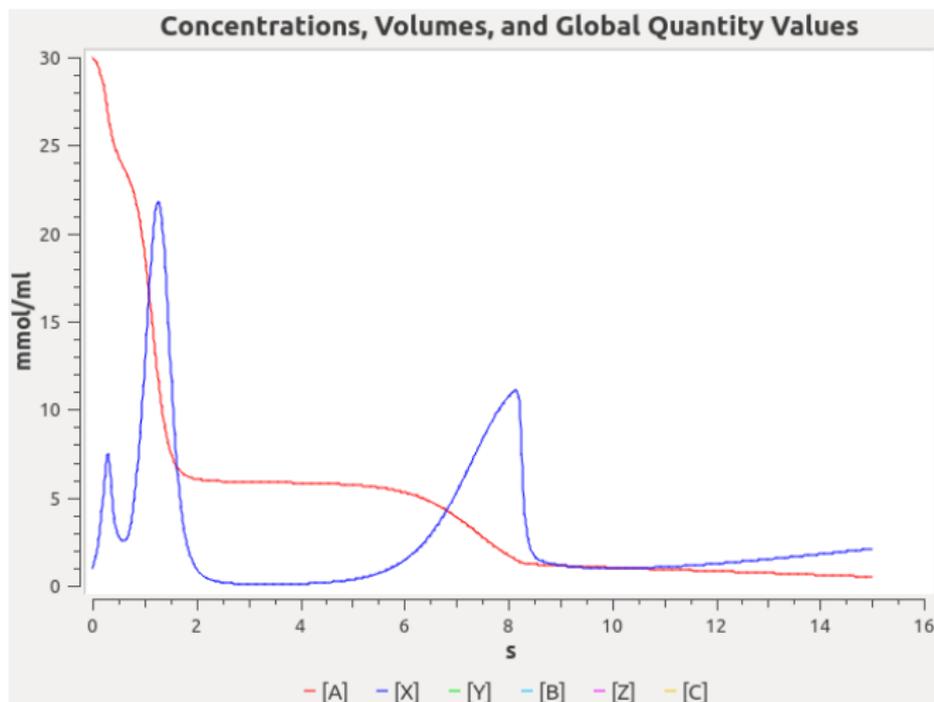
- Jacobi-Matrix aus partiellen Ableitungen
- Eigenwerte analysieren

# Energieerhaltung



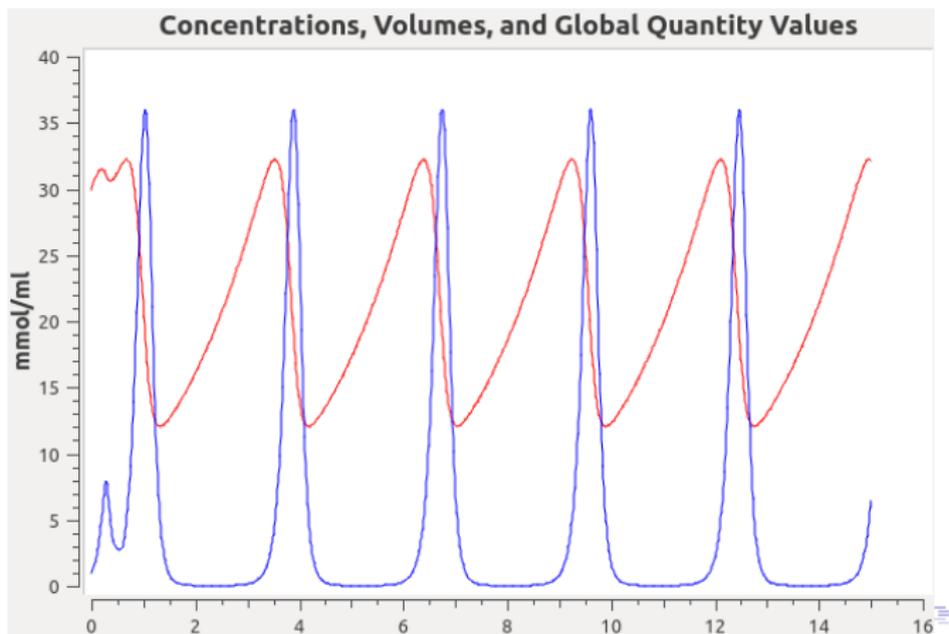
# Energieerhaltung

- Nahrung (rot) wird verbraucht,  $\rightarrow$  Kaninchen können nicht kontinuierlich anwachsen



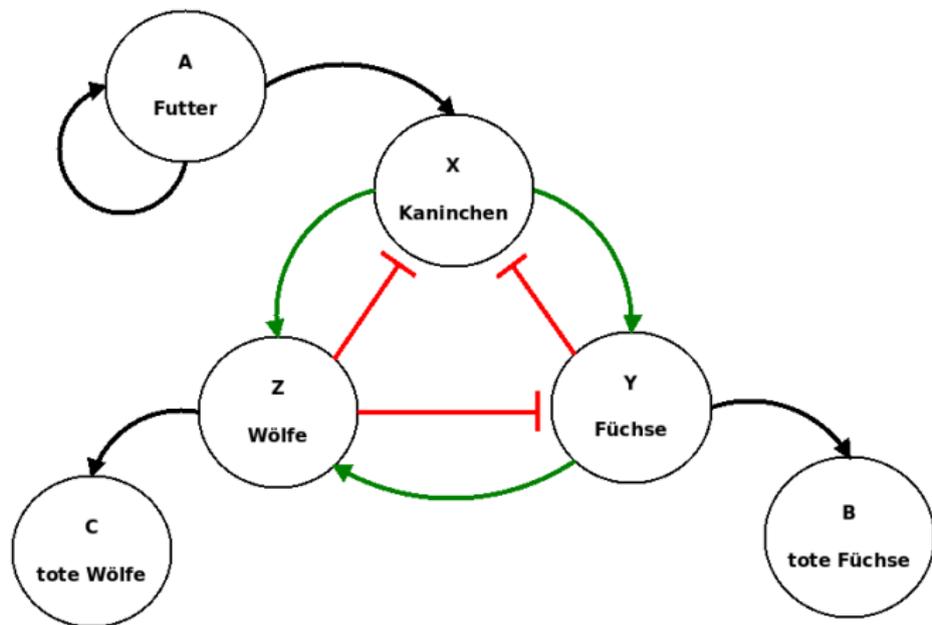
# Energieerhaltung

- Wächst kontinuierlich Nahrung nach, so kann sich die Kaninchenpopulation nach einer Räuberwelle wieder erholen



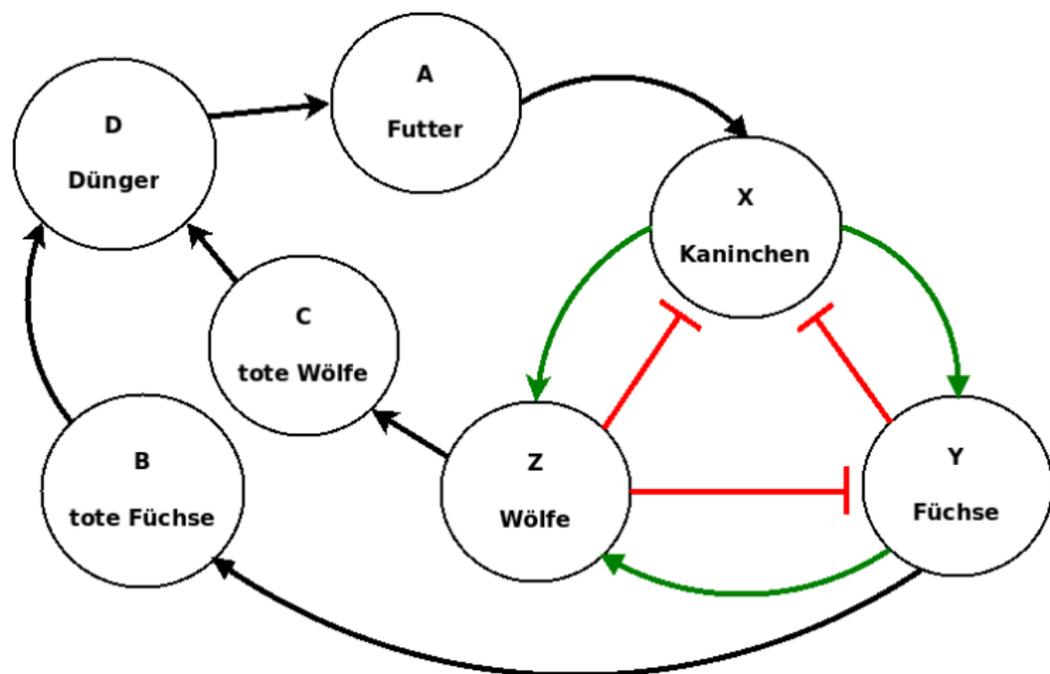
# Energieerhaltung

- Lösung: Futter erhält sich selbst
- $A \rightarrow 2A$



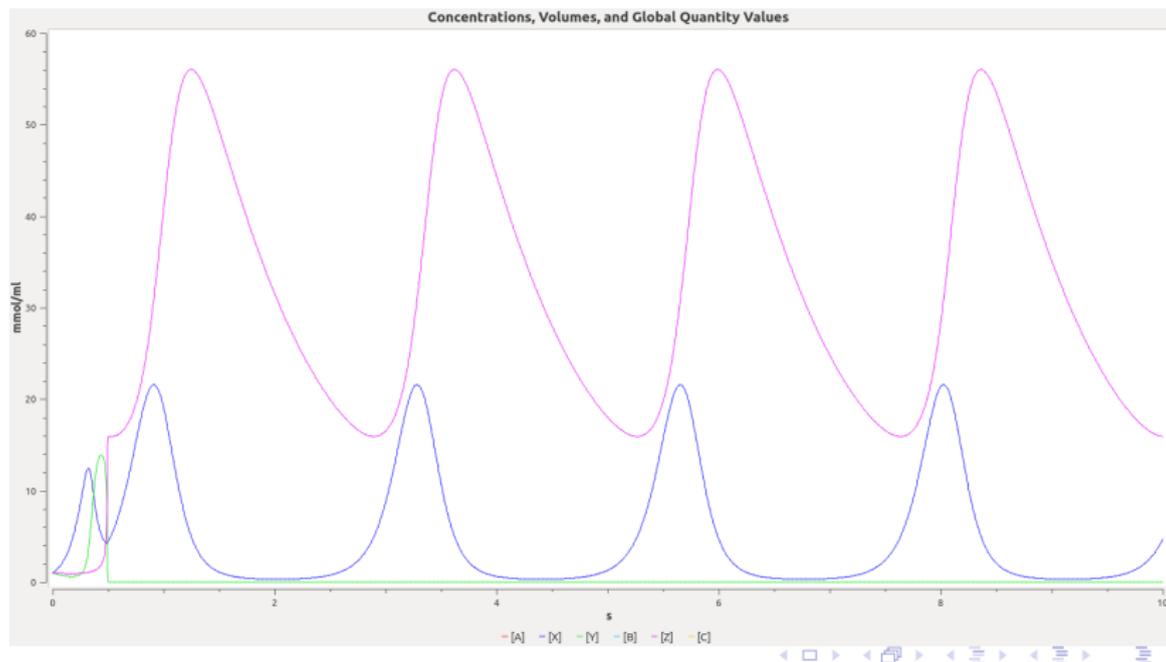
# Energieerhaltung

- Lösung: Circle of Life



# Experimentelles Modellieren

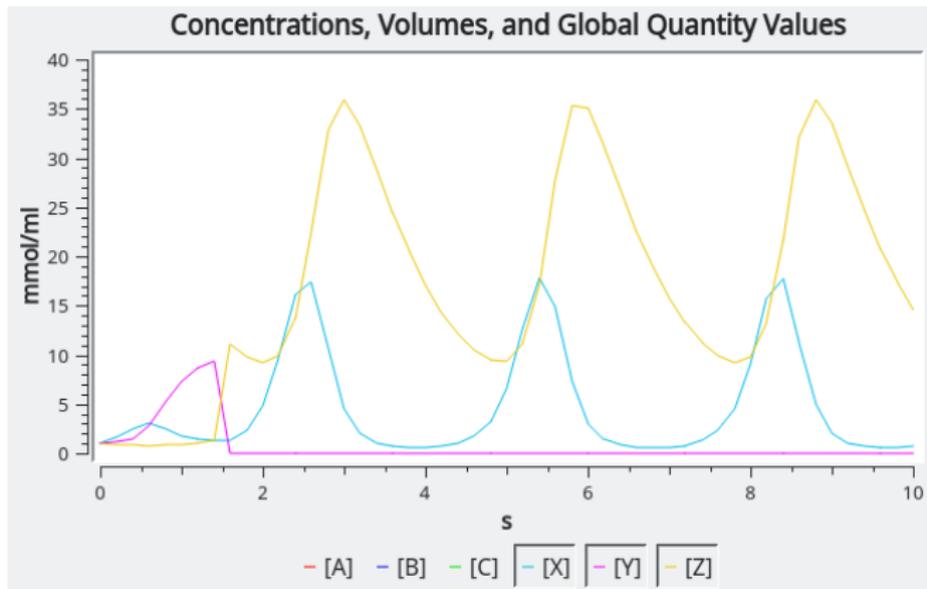
- Oszillation wird erzeugt, aber zu welchem Preis?



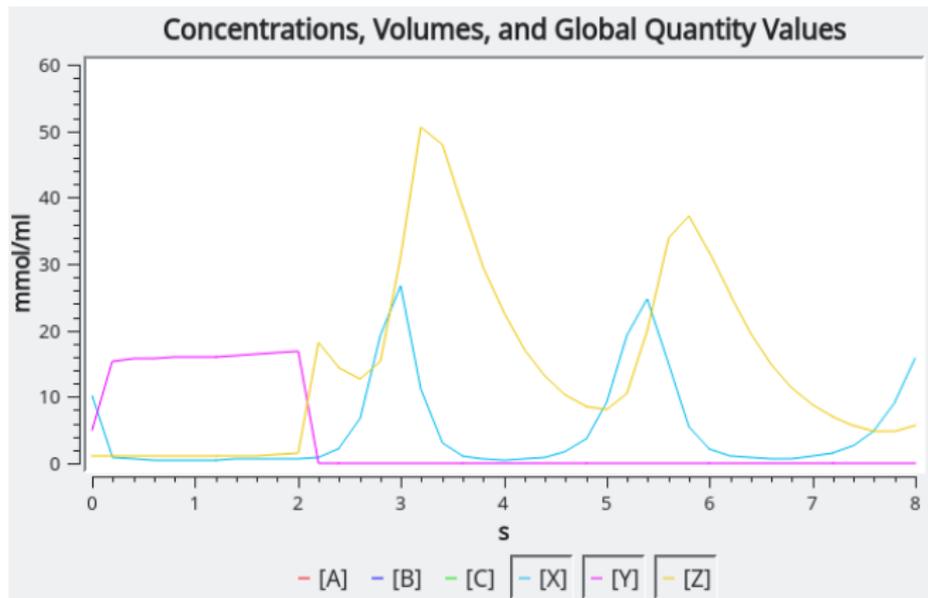
# Grenzyklen und Verhalten des Systems außerhalb dieses Bereiches

- umso näher an den Grenzyklen, desto länger benötigt das System, um sich einzupendeln
- nach den Grenzen stirbt eine oder mehrere Spezies aus und es kommt zu einem extremen Anstieg der verbliebenen

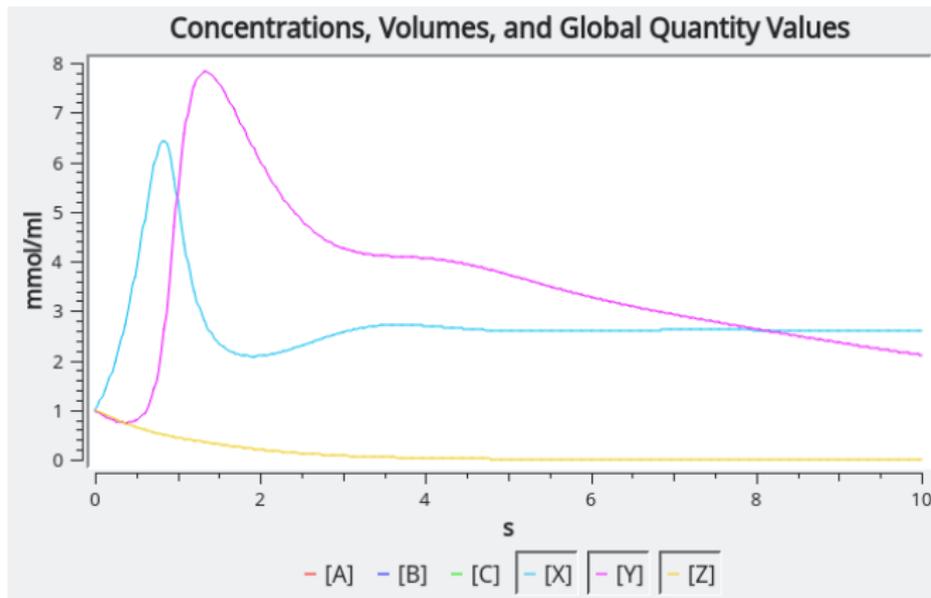
# Grenzwert Füchse sterben aus



# Verlängerung der Einschwingung

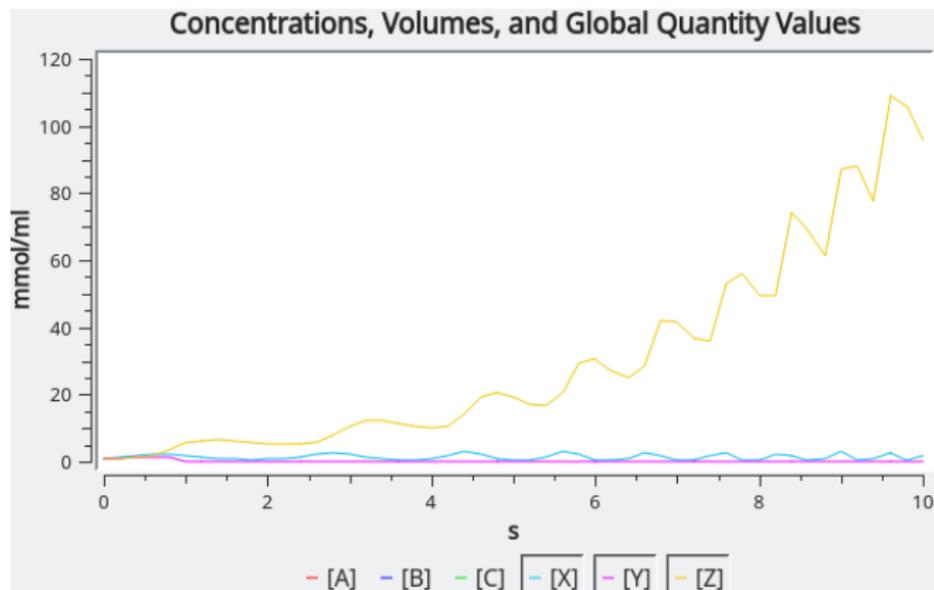


# Grenzwert Wölfe sterben aus

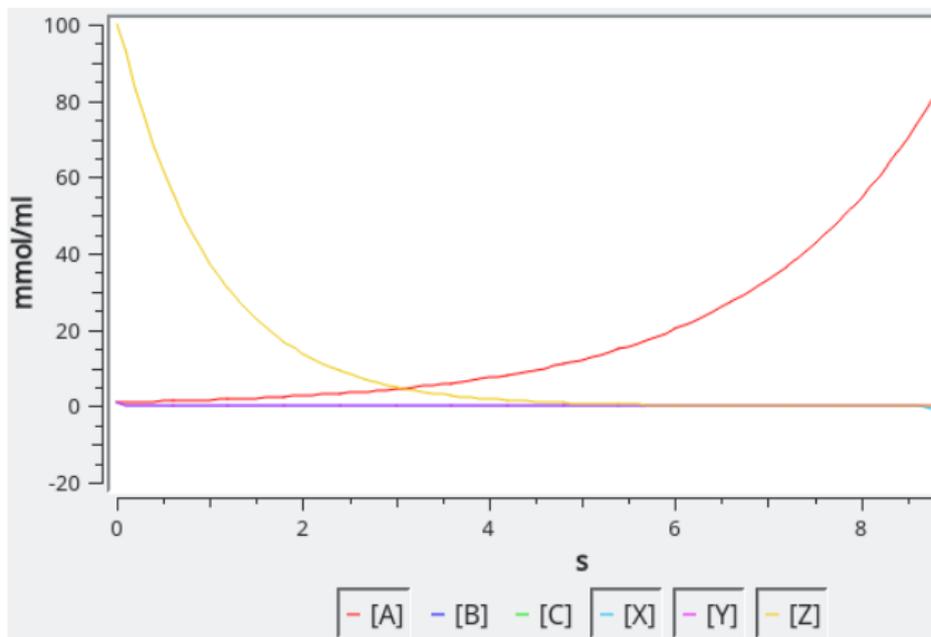


# Grenzwert Aussterben und exponentieller Anstieg

meist stirbt eine Räuberspezies aus und die andere steigt exponentiell an

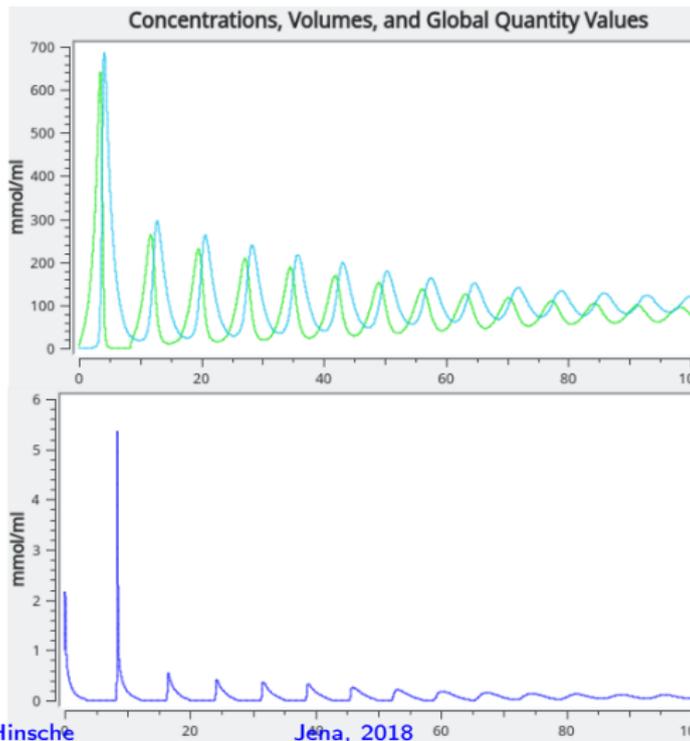


# Grenzwert generelles Aussterben - Nahrung



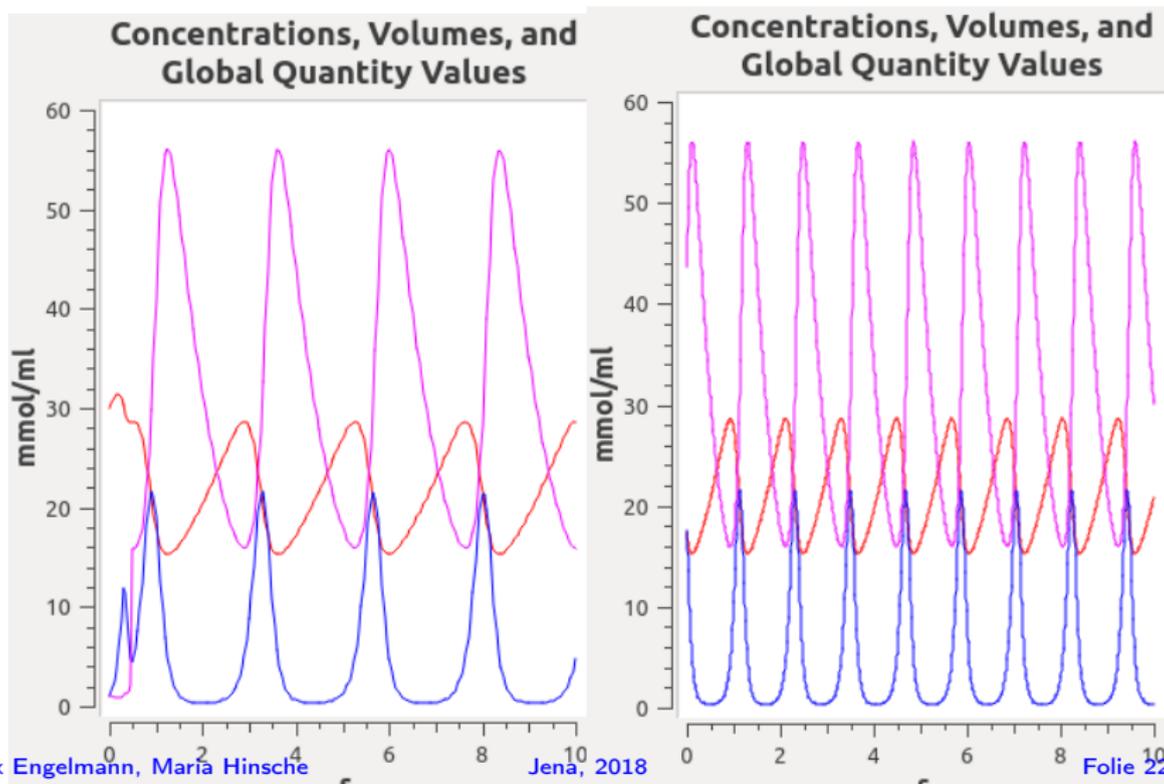
# Oszillation für alle Spezies

Ergänzung einer weiteren Reaktion - Füchse vermehren sich



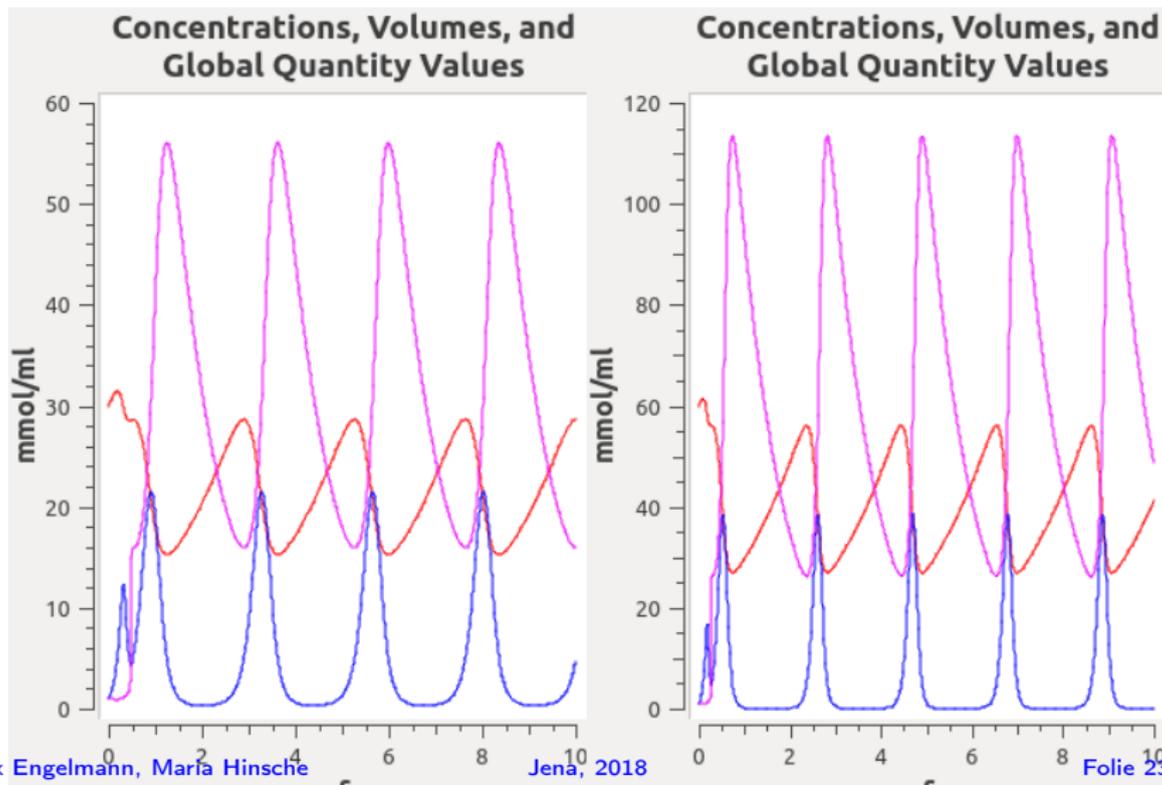
# Beeinflussung der Oszillationsfrequenz

- Ratenkonstanten  $\sim$  Oszillationsfrequenz



# Startwerte und Amplituden

- Startwert Ausgangsstoff  $\sim$  Amplituden



Fragen?



Abbildung: 'Stoned Fox' (Adele Morse)