Chomsky-Grammatik zur Ausführung der modulo-Operation

Modulo

- „Division mit Rest“
- a mod b =r
- a = b*c + r
- r = a – (b * c)

Chomsky-Grammatik

- $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit
- $V = \{S, S_1, S_2, L, R, A, B, C, D, E, F, G, H, I, X\}$
- $\Sigma = \{a, L, R\}$

Ersetzungsregeln

- P = {
  - $S \to LS_1KDXES_2R$
  - $S_1 \to$ A….A (Dividend)
  - $S_2 \to$ B...B (Divisor)
  - BC → CB
  - AC → D
  - ADC → D
  - ADB → KADXBE
  - AK → KA
  - EB → BE
  - LK → LF
  - ER → GR
  - FA → AF
  - BG → GB
  - FDXG → ε
  - AB → ε
  - LD → LH
  - H → ε
  - FDX → DXF
  - DXG → GDX
  - FGB → H
  - HB → H
  - DXH → H
  - AH → A
  - A → a
  - AFG → AI
  - IA → AI
  - IB → CB
  - IR → R
  - IDXB → DIBX
  - IB → CB
  - XB → CBX
  - XR → R
  - La..aR → |a| є N
  - LR → 0 }

Idee

Iterativ: Prüfen, ob mehr As oder Bs

- ➔ Mehr A: A zählen
- ➔ Mehr B: Subtraktion; von vorne
- ➔ Gleiche Anzahl: Auflösen

Beispiel: 5 mod 2 = 1

$S \rightarrow LS_1KDXES_2R \rightarrow$ LAAAAAKDXEBBR → LAAAAKADXBEBR → LAAAKAADXBBER → LAAKAAADXBBGR → LAKAAAADXBGBR → LKAAAAADXGBBR → LFAAAAAGDXBBR → ... → LAAAAAFGDXBBR → LAAAAAIDXBBR → LAAAAADIBXBR → LAAAAADCBCBXR → LAAAADCBBR → LAAADBBR → LAAKADXBEBR → LAKAADXBBER → LKAAADXBBGR → LFAAADXBGBR → LAFAADXGBBR → LAAFAGDXBBR → LAAAFGDXBBR → LAAAIDXBBR → LAAADIBXBR → LAAADCBCBXR → LAADCBBR → LADBBR → LKADXBEBR → LFADXBBER → LAFDXBBGR → LADXFBGBR → LADXFGBBR → LADXHBR → LADXHR → LAHR → LAR → LaR → 1

Beispiel: 3 mod 3 = 0

LAAAKDXEBBBR → LAAKADXBEBBR →
LAKAADXBBEBR → LKAAADXBBBER →
LFAAADXBBBGR → LAFAADXBBGBR →
LAAFADXBGBBR → LAAAFDXGBBBR →
LAAABBBR → LAABBR → LABR → LR → 0

Komplexität

- Worterzeugung: 3 Regelanwendungen, 2 Zeitschritte

  S →LSKDXESR → LA..AKDXESR → LA..AKDXEB..BR

- Prüfen: 1 + 2|A| + 2|B| Anwendungen,
  2 * max(|A|, |B|) Zeitschritte

Komplexität

- Alternativen:
  - Mehr As als Bs:
    Substraktion:
    2 + |B|+|A| + |B-1|+|B-2|+… Anwendungen, 2 + |B| Zeitschritte
  - Gleich viele As wie Bs:
    1 + |B| + |A| Anwendungen, 1 + |B| + |A| Zeitschritte
  - Mehr Bs als As:
    „Löschen“ der Bs und Zwischenvariablen, Umwandeln der As in Terminale, Auswertung:
    4 +|B| + |A| Anwendungen, 4 + |B| + |A| Zeitschritte

Komplexität

- Insgesamt:

- „Division mit Rest“
- a mod b =r
- a = b*c + r
- r = a – (b * c)

Komplexität

- Insgesamt:
  - Regelanwendungen:
    - 3 + (c + 1) * Prüfen + c * Subtraktion + Auflösen der Differenz
      =
    - 3 + (c + 1) * (1 + 2|A| + 2|B|) + c* (2 + |B|+|A| + |B-1|+|B-2|+…) + [1 ODER 4] + |B| + |A|
      =
      [5 ODER 8] + 3c + 4|A| + 3|B| + 2c|A| + 3c|B| + c(|B-1| + |B-2|+..)

Komplexität

- Insgesamt:
  - Zeitschritte:
    - 3 + 2(c+1) * max(|A|, |B|) + c*(2 + |B|) + [1 ODER 4] + |B| + |A|
      ~
      O(|A| + |B|)